ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 16 Март 1976 Апрель № 2

УДК 518 : 517.392

О КВАДРАТУРАХ НА СФЕРЕ

В. И. ЛЕБЕДЕВ

(Москва)

Предложены и исследованы методы получения квадратур типа Гаусса, инвариантных относительно группы вращения октаэдра с инверсией, приведены квадратуры типа Гаусса для $n=19$, 23 и квадратуры типа Чебышева для $n=11$, 15. Даны оценки погрешности. Изложен метод Монте-Карло с малой дисперсией.

С. Л. Соболевым в работе [1] была поставлена задача о нахождении инвариантных относительно некоторой группы вращения квадратур типа Гаусса для сферы, веса́ и положения узлов в которых определяются из требования, чтобы квадратуры точно интегрировали все многочлены до возможно более высокой степени n, а узлы их были инвариантны относительно выбранной группы вращения. Такая постановка вопроса существенно облегчила анализ задачи построения квадратур. Некоторые квадратуры для сферы содержатся в работах [2–6]. Квадратуры типа Гаусса соответствуют полному использованию всех трех свободных параметров у каждого плавающего узла: его координат и веса. А ввиду однородности сферы можно надеяться на хорошее равномерное распределение на сфере узлов таких квадратур. Очевидно, что квадратуры типа Гаусса будут обладать меньшим по сравнению с обычными числом узлов. Поэтому их целесообразно использовать в некоторых областях применения численных методов, например в гармоническом анализе на сфере, в вычислении коэффициентов Фурье от функции при разложении ее по гармоническим многочленам [2] и, особенно, в разностных аппроксимациях интегральных операторов многомерных уравнений переноса частиц [7]. Однако задача определения весов и узлов квадратур типа Гаусса довольно сложна, ибо она сводится к решению нелинейных алгебраических систем уравнений.

В настоящей работе мы исследуем некоторые свойства таких систем и укажем пути решения их для случая, когда веса и узлы квадратур инвариантны относительно группы вращения октаэдра с инверсией G_8^*. В статье приведены квадратуры типа Гаусса для $n=19$, 23 (квадратуры меньших степеней опубликованы автором в [6]) и квадратуры типа Чебышева для $n=11$, 15. Даны оценки погрешности. Изложен метод Монте-Карло с малой дисперсией.

§ 1

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $R_3(x, y, z)$ задана сфера S: $x^2+y^2+z^2=1$, а Ω — вписанный в нее октаэдр, вершины которого лежат на осях координат. Пусть

$$I(f)=\frac{1}{4\pi}\int_S f(s)p(s)\,ds, \tag{1.1}$$

где $s\in S$, $p(s)\neq 0$ — интегрируемая весовая функция, инвариантная относительно G_8^* и такая, что $I(1)=1$, а $ds=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

Квадратуры для (1.1) будем искать в виде

$$S_n(f)=A_1\sum_{i=1}^{6} f(a_i^1)+A_2\sum_{i=1}^{12} f(a_i^2)+A_3\sum_{i=1}^{8} f(a_i^3)+ \tag{1.2}$$

$$+\sum_{k=1}^{N_1} B_k\sum_{i=1}^{24} f(b_i^k)+\sum_{k=1}^{N_2} C_k\sum_{i=1}^{24} f(c_i^k)+\sum_{k=1}^{N_3} D_k\sum_{i=1}^{48} f(d_i^k),$$

где проекции узлов a_i^1, a_i^2, a_i^3, b_i^k, c_i^k, d_i^k на Ω находятся, соответственно, в вершинах, серединах ребер, центрах граней, на биссектрисах и ребрах граней Ω, а $d_i^k\in S$ — узлы общего положения. Для каждого фиксированного k каждая группа узлов a_i^k, b_i^k, c_i^k, d_i^k инвариантна относительно G_8^*. Это значит, что узлы b_i^k, c_i^k, d_i^k имеют следующие координаты:

b_i^k: $(\pm l_k, \pm l_k, \pm m_k)$, $(\pm l_k, \pm m_k, \pm l_k)$, $(\pm m_k, \pm l_k, \pm l_k)$, где $l_k=$ $=2^{-1/2}(1-m_k^2)^{1/2}$;

c_i^k: $(\pm p_k, \pm q_k, 0)$, $(\pm p_k, 0, \pm q_k)$, $(0, \pm p_k, \pm q_k)$, $(\pm q_k, \pm p_k, 0)$, $(\pm q_k, 0, \pm p_k)$, $(0, \pm q_k, \pm p_k)$, где $q_k=(1-p_k^2)^{1/2}$;

d_i^k: $(\pm r_k, \pm u_k, \pm w_k)$, $(\pm r_k, \pm w_k, \pm u_k)$, $(\pm u_k, \pm r_k, \pm w_k)$, $(\pm u_k, \pm w_k, \pm r_k)$, $(\pm w_k, \pm u_k, \pm r_k)$, $(\pm w_k, \pm r_k, \pm u_k)$.

Метод получения квадратур основан на использовании теоремы 1 работы [1], согласно которой от квадратуры достаточно потребовать, чтобы она была точна лишь для инвариантных относительно G_8^* многочленов, число которых для каждой степени подсчитано в [1]. Построить все инвариантные относительно G_8^* многочлены поможет простая

Лемма. *Любой многочлен, инвариантный относительно группы G_8^*, представим на S в виде многочлена от $\sigma_2=x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$ и $\sigma_3=x^2y^2z^2$.*

В самом деле, любой многочлен $P(x, y, z)$ степени n, инвариантный относительно G_8^*, обязан содержать лишь четные степени неизвестных, ибо $P(\pm x, \pm y, \pm z)=P(x, y, z)$, и быть инвариантным при любых перестановках переменных, т. е. быть симметрической функцией от переменных x^2, y^2, z^2. Следовательно, $P(x, y, z)$ выражается через элементарные симметрические многочлены $\sigma_1=x^2+y^2+z^2$, $\sigma_2=x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$ и $\sigma_3=x^2y^2z^2$, т. е. он является многочленом от σ_1, σ_2, σ_3, но поскольку на сфере $\sigma_1\equiv 1$, то

$$P(x,y,z)|_S=Q(\sigma_2,\sigma_3)=\sum_{0\leqslant 4i+6j\leqslant n} a_{ik}\sigma_2^i\sigma_3^j.$$

Так как степень многочлена Q по переменным σ_2, σ_3 существенно ниже n, то за новые переменные выгодно взять σ_2, σ_3.

Образующие базис многочлены в пространстве инвариантных относительно G_8^* многочленов до степени $n \geqslant 6$ удобно для дальнейшего анализа взять в таком виде.

Группа A:

$$a_1 = 9\sigma_3 - 4\sigma_2 + 1, \quad a_2 = \sigma_2 - 9\sigma_3, \quad a_3 = \sigma_3, \quad a_4 = {}^4/_3\left(\sigma_3 + \frac{\sigma_2}{3}(1 - 4\sigma_2)\right).$$

Группа B:

$$b_{4i+6} = 4\sigma_3 b_4^i, \qquad b_{4j+12} = 4\sigma_3 b_6 b_4^i,$$

где $b_4 = {}^4/_3({}^1/_3 - \sigma_2)$, $b_6 = {}^4/_9(9\sigma_3 - 3\sigma_2 + {}^2/_3)$, $1 \leqslant i \leqslant {}^1/_4(n-6)$, $1 \leqslant j \leqslant {}^1/_4(n-12)$.

Группа C:

$$c_{4i+12} = \sigma_2^i c_{12},$$

где $c_{12} = \sigma_2^2(1 - 4\sigma_2) - \sigma_3(4 + 27\sigma_3 - 18\sigma_2)$, $0 \leqslant i \leqslant {}^1/_4(n-12)$.

Группа D:

$$d_{ij} = \sigma_2^i \sigma_3^j c_{12}, \qquad j \geqslant 1, \qquad 6 \leqslant 4i + 6j \leqslant n - 12.$$

Пусть $t = z^2$, $\alpha = \sin^2 2\varphi$, $v = t(1-t)$. Для подсчета $I(\sigma_2^i \sigma_3^j)$ многочлены σ_2, σ_3 представляем в виде

$$\sigma_2 = \frac{(1-t)}{4}(4t + (1-t)\alpha), \qquad \sigma_3 = \frac{t}{4}(1-t)^2\alpha.$$

Пусть $l_1(n)$, $l_2(n)$, $l_3(n)$ — число линейно-независимых многочленов, соответственно, в группах B, C, D. Степень квадратуры n удобно для исследований представить в виде

$$n = 12m + 2g + 1, \qquad g = 0, 1, \ldots, 5,$$

а качество ее оценивать величиной

$$\eta = \frac{(n+1)^2}{3N},$$

где N — общее число узлов квадратуры, а $(n+1)^2$ — общее число правильно интегрируемых квадратурой первых сферических функций. Рассмотрим свойства функций групп A, B, C, D.

В группе A многочлены a_1, a_2, a_3 шестой степени, а a_4 — восьмой, причем $a_1(a_i^1) = 1$, $a_2(a_2^2) = {}^1/_4$, $a_3(a_i^3) = {}^1/_{27}$, $a_k(a_i^j) = 0$ при $k \neq j$, $a_4(a_i^j) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Обозначим $\alpha_i = I(a_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

В группе B многочлены обращаются в нуль при $x = y = z = 0$ и в точках a_i^k; $b_k = t(1-t)^2(t - {}^1/_3)^{k-6}$, $k = 10, 12, \ldots$, при $x = y$. Для них $l_1(n) = 6m + g - 4$. Обозначим $\beta_k = I(b_k)$, $t_k = m_k^2$, $\varphi(t) = t(1-t)(t - {}^1/_3)^2$, $\overline{B}_k = \overline{B}_k \varphi(t_k)$, $\widetilde{B}_k = \overline{B}_k(1 - t_k)$, $\hat{B}_k = B_k(1 - t_k)(t_k - {}^1/_3)^2$.

В группе C многочлены c_{4i+12} степени $4i + 12$ обращаются в нуль при $x = y$, $x = z$, $y = z$ и в точках a_i^k. А при $y = 0$ или $x = 0$ будет $c_{4i+12} = (1 - 4v)v^{2+i}$,

$i=0, 1, \dots$. Для них $l_2(n)=3m-2+[g/2]$. Обозначим $\gamma_{4i+12}=I(\sigma_2^i c_{12})$, $v_k=$ $=p_k^2(1-p_k^2)$, $\psi(v)=v(1-4v)$, $\bar{C}_k=C_k\psi(v_k)$, $\tilde{C}_k=C_k v_k \psi(v_k)$, $\hat{C}_k=C_k v_k$.

В группе D многочлены d_{ij} степени $4i+6j+12$ обращаются в нуль при $x=y=z=0$ и $x=y$, $x=z$, $y=z$. Число многочленов d_{ij} степени $2k+18$ равно $[^2/_3 k]-[^1/_2 k]+^1/_2(1+(-1)^k)$, а $l_3(n)=3m(m-2)+mj+2+[g/2]+\varkappa(g)$, где $\varkappa(g)=1$ при $g=1, 2, 3, 4, 5$ и $\varkappa(0)=0$.

Обозначим $\delta_i^j=I(\sigma_2^i\sigma_3^j c_{12})$, $\bar{D}_k=D_k\sigma_3 c_{12}$, $\tilde{D}_k=D_k c_{12}$.

§ 2

Требуя, чтобы квадратура (1.2) была точна, т. е.

$$I(f)=S_n(f) \tag{2.1}$$

для выписанных многочленов групп A, B, C, D до степени n включительно, мы получим систему алгебраических уравнений, состоящую из четырех подсистем, которые обозначим также через A, B, C, D, в соответствии с подставляемыми в (2.1) группами функций. Группы неизвестных A_i; B_k, t_k; C_k, v_k; D_k, σ_{2k}, σ_{3k} также будем обозначать буквами A, B, C, D соответственно. Итак, система будет иметь следующий вид.

Подсистема A:

$$6A_1+54\sum_{k=1}^{N_1} B_k t_k(t_k-{}^1/_3)^2+24\sum_{k=1}^{N_2} C_k(1-4v_k)+ \\ +48\sum_{k=1}^{N_3} D_k a_1(\sigma_{2k},\sigma_{3k})=\alpha_1, \tag{2.2}$$

$$3A_2+54\sum_{k=1}^{N_1} B_k(1-t_k)(t_k-{}^1/_3)^2+24\sum_{k=1}^{N_2} C_k v_k+ \\ +48\sum_{k=1}^{N_3} D_k a_2(\sigma_{2k},\sigma_{3k})=\alpha_2. \tag{2.3}$$

$$\frac{8A_3}{27}+6\sum_{k=1}^{N_1} B_k t_k(1-t_k)^2+48\sum_{k=1}^{N_3} D_k\sigma_{3k}=\alpha_3, \tag{2.4}$$

$$24\sum_{k=1}^{N_1} B_k\varphi(t_k)+\frac{32}{3}\sum_{k=1}^{N_2} C_k\psi(v_k)+48\sum_{k=1}^{N_3} D_k a_4(\sigma_{2k},\sigma_{3k})=\alpha_4. \tag{2.5}$$

Подсистема B:

$$24\sum_{k=1}^{N_1} B_k\varphi(t_k)(1-t_k)(t_k-{}^1/_3)^{2i-2}+192\sum_{k=1}^{N_3} D_k\sigma_{3k}b_4^i(\sigma_{2k})=\beta_{4i+6},$$

(2.6)

$$24\sum_{k=1}^{N_1} B_k\varphi(t_k)(1-t_k)(t_k-{}^1/_3)^{2i-1}+$$

$$+192\sum_{k=1}^{N_3} D_k\sigma_{3k}b_6(\sigma_{2k},\sigma_{3k})\,b_4^{i-1}(\sigma_{2k})=\beta_{4i+12},\qquad i=1,2,\ldots .$$

Подсистема C:

(2.7) $$24\sum_{k=1}^{N_1} C_k\psi(v_k)\,v_k^{i+1}+48\sum_{k=1}^{N_3} D_k\sigma_{2k}{}^i c_{12}(\sigma_{2k},\sigma_{3k})=\gamma_{4i+12},\qquad i=0,1,\ldots .$$

Подсистема D:

(2.8) $$48\sum_{k=1}^{N_3} D_k c_{12}(\sigma_{2k},\sigma_{3k})\,\sigma_{2k}{}^i\sigma_{3k}{}^j=\delta_i^j,\qquad i=0,1,\ldots,\qquad j=1,2,\ldots .$$

Значения N_i, $i=1, 2, 3$, и N выберем такими, чтобы общее число неизвестных в системе было равно числу уравнений. Для этого мы будем полагать в некоторых случаях $A_2=0$ (в таблице — для $n=9$, 15, 17, 25, 29, 31, 41, 49).

Приведем для каждого g формулы для N_i, N, выраженные через m:

$g=0$:

$$N_2=\left[\frac{3m-1}{2}\right],\qquad N_3=(m-1)^2,\qquad N={}^1/_3(n^2+n+40),$$

$\eta>1$ при $n\geqslant 49$;

если m нечетно, то $N_1=3m-2$, если m четно, то $N_1=3m-1$ и $A_2=0$.

$g=1$: $N_1=3m-1$, $N_3=[{}^1/_3(3(m-1)^2+m+1)]$; если $m=3q+p$, где q, p целые, то имеем:

1) при $p=0$

$$N_2=\left[\frac{3m-2}{2}\right],\qquad N=\frac{1}{3}(n^2+n+30),\qquad \eta>1 \text{ при } n\geqslant 39;$$

если m четно, то $A_2=0$;

2) при $p=1$

$$N_2=\left[\frac{3m-1}{2}\right],\qquad N=\frac{1}{3}(n^2+n+18),\qquad \eta>1 \text{ при } n\geqslant 51;$$

если m нечетно, то $A_2=0$;

3) при $p=2$

$$N_2=\left[\frac{3m-3}{2}\right],\qquad N=\frac{1}{3}(n^2+n+42),\qquad \eta>1 \text{ при } n\geqslant 63;$$

если m нечетно, то $A_2=0$.

$g=2$: $N_1=3m$, $N_2=m$, $N_3=m(m-1)$, $N={}^1/_3(n^2+2n+7)$, $A_2=0$.

$g=3$: $N_1=3m$, $N_2=[(3m-2)/2]$, $N_3=m(m-1)+1$, $N={}^1/_3(n^2+n+58)$, $\eta>1$ при $n\geqslant 67$.

$g=4$: $N_1=3m$, $N_3=[{}^1/_3(3m^2-2m+2)]$; если $m=3q+p$, то имеем:

1) при $p=0$

$$N_2=\left[\frac{3m+1}{2}\right],\qquad N=\frac{1}{3}(n^2+n+24),\qquad \eta>1\quad\text{при}\quad n\geqslant 45;$$

2) при $p=1$

$$N_2=\left[\frac{3m}{2}\right],\qquad N=\frac{1}{3}(n^2+n+48),\qquad \eta>1\quad\text{при}\quad n\geqslant 57;$$

3) при $p=2$

$$N_2=\left[\frac{3m+1}{2}\right],\qquad N=\frac{1}{3}(n^2+n+36),\qquad \eta>1\quad\text{при}\quad n\geqslant 69.$$

$g=5$: $\quad N_1=3m+1,\ N_2=m,\ N_3=m^2,\ N={}^1/_3(n^2+2n+7).$

Распределение узлов на сфере при $g=2, 5$ совпадает с точностью до инвариантного относительно G_8^* непрерывного преобразования с распределениями второго типа, предложенными в [1]. Распределения узлов при $g=2, 5$ наиболее регулярно триангулируют поверхность сферы. Приведем таблицу значений n, N_1, N_2, N_3, N, η.

n	N_1	N_2	N_3	N	η	n	N_1	N_2	N_3	N	η
9	0	1	0	38	0.877	31	6	2	3	350	0.975
11	1	0	0	50	0.960	33	6	3	3	386	0.998
13	1	1	0	75	0.928	35	7	2	4	434	0.995
15	2	1	0	86	0.992	37	7	4	4	482	0.999
17	3	1	0	110	0.982	39	8	3	5	530	1.006
19	3	0	1	146	0.913	41	9	3	6	590	0.997
21	3	1	1	170	0.949	43	9	3	7	650	0.993
23	4	1	1	194	0.990	45	9	5	7	698	1.011
25	5	2	1	230	0.980	47	10	3	9	770	0.997
27	5	1	2	266	0.982	49	11	5	9	830	1.004
29	6	2	2	302	0.993	51	11	5	10	890	1.013

Прежде чем перейти к разбору способов решения системы уравнений (2.2)—(2.8), напомним, как решаются моментные системы уравнений от одного переменного. Пусть задана моментная система

$$\sum_{i=1}^{p} B_i u_i^k = c_k,\qquad k=0, 1, \ldots, 2p-1, \tag{2.9}$$

где определяются B_i, u_i по известным величинам c_k. Система (2.9) решается так. Находим вектор $(f_0, \ldots, f_{p-1})$ как решение линейной системы уравнений с ганкелевой матрицей:

$$\begin{aligned} &c_0f_0+c_1f_1+\ldots+c_{p-1}f_{p-1}=c_p,\\ &c_1f_0+c_2f_1+\ldots+c_pf_{p-1}=c_{p+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &c_{p-1}f_0+c_pf_1+\ldots+c_{2p-2}f_{p-1}=c_{2p-1}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Тогда u_i будут корнями уравнения

$$F_p(u)=0, \tag{2.11}$$

где $F_p(u)=u^p-f_{p-1}u^{p-1}-f_{p-2}u^{p-2}-\ldots-f_0$, а $B_i=G_{p-1}(u_i)/F_p'(u_i)$, где $G_{p-1}(u)=g_0+g_1u+\ldots+g_{p-1}u^{p-1}$ и

$$
\begin{aligned}
&g_{p-1}=c_0,\\
(2.12)\qquad &g_{p-2}=c_1-f_{p-1}c_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&g_0=c_{p-1}-f_{p-1}c_{p-2}-\ldots-f_1c_0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, решение системы (2.9) сводится к последовательному решению сначала системы линейных уравнений p-го порядка (2.10), а затем к нахождению корней алгебраического уравнения p-го порядка (2.11). Напомним, что u_i являются точками сосредоточения масс так называемого нижнего главного представления и что существуют критерии, когда $B_i>0$ и u_i лежат в заданном отрезке [8].

Перейдем к исследованию алгоритмов решения всей системы уравнений при $n\geqslant19$ (для $n\leqslant17$ будет $N_3=0$ и методы решения описаны в [6]). Заметим следующее.

а. Неизвестные A_1, A_2, A_3 входят только в одно из уравнений (2.2) — (2.4), поэтому эти уравнения мы используем для определения A_1, A_3 и A_2, если $A_2\neq0$, через неизвестные групп B, C, D. Поскольку неизвестные каждой из групп B, C, D входят в уравнения (2.2) — (2.4) симметричным образом, то A_i выражаются рационально через симметрические многочлены от t_k, v_k, σ_{2k}, σ_{3k} соответственно. Присоединяя иногда к остальной системе уравнение (2.3) с $A_2=0$, мы будем это уравнение символически обозначать как $A_2=0$.

б. В подсистемах B, C, D будет возможна замена неизвестных B_k, C_k, D_k, понижающая алгебраический порядок всей системы. Эту замену мы указываем в каждом случае. Пусть $h_k=(t_k-{}^1/_3)$.

в. По найденным значениям t_k, v_k, σ_{2k}, σ_{3k} координаты точек b_i^k, c_i^k, d_i^k определяются по формулам

$$m_k=t_k^{1/2},\qquad p_k=\left\{\frac{1}{2}[1+(1-4v_k)^{1/2}]\right\}^{1/2},$$

а r_k, u_k, w_k являются корнями уравнения

$$t^6-t^4+\sigma_{2k}t^2-\sigma_{3k}=0.$$

Разберем семь случаев. В случаях 1—4 система (2.5) — (2.8) распадается на три подсистемы, решаемые последовательно.

Случай 1. m нечетное, а $g=0$ или 4, $p=0$. Сначала решаем подсистему относительно неизвестных D_k, σ_{2k}, σ_{3k}. Эта подсистема является моментной системой от двух переменных σ_2, σ_3. Найдя D_k, σ_{2k}, σ_{3k}, преобразуем подсистему B в моментную систему типа (2.9) относительно $\bar{B}_k$, h_k, которую решаем алгоритмом (2.10) — (2.12). Присоединяя к подсистеме C уравнение (2.5), получаем моментную систему типа (2.9) относительно $\bar{C}_k$, v_k.

Случай 2. $g=4$, $p=0$, m четно. Неизвестные групп D, B находятся, как в случае 1. Присоединяя к подсистеме C уравнение (2.5) и уравнение $A_2=0$, решаем ее как моментную систему типа (2.9) относительно неизвестных $\bar{C}_k$, v_k.

Случай 3. m четное, $g=0$. Сначала решаем подсистему D относительно неизвестных $\bar{D}_k$, σ_{2k}, σ_{3k}. Затем подсистему C — моментную систему типа (2.9) — относительно неизвестных $\tilde{C}_k$, v_k. Присоединяя к подсистеме B уравнение (2.5) и уравнение $A_2=0$, преобразуем ее в моментную систему типа (2.9) относительно неизвестных $\hat{B}_k$, h_k.

Случай 4. m четное, $g=1$, $p=1$. Неизвестные групп D, C находятся, как в случае 3. Присоединяя к подсистеме B уравнение (2.5), преобразуем ее в моментную систему типа (2.9) относительно неизвестных $\bar{B}_k$, h_k.

В случаях 5—6 системы распадаются на две подсистемы: C, D и B.

Случай 5. $g=5$; $g=3$, m нечетно; $g=1$, $p=0$, m нечетно; $g=1$, $p=2$, m четно. Сначала решаем подсистему (2.7), (2.8) с неизвестными $\tilde{C}_k$, v_k, D_k, σ_{2k}, σ_{3k}. Затем, присоединяя к подсистеме B уравнение (2.5), преобразуем ее в моментную систему типа (2.9) относительно неизвестных $\bar{B}_k$, h_k.

Случай 6. $g=2$; неизвестные групп D, C находятся, как в случае 5. Затем, присоединяя к подсистеме B уравнение (2.5) и уравнение $A_2=0$, преобразуем ее в моментную систему типа (2.9) относительно неизвестных $\hat{B}_k$, h_k.

Случай 7. Прочие комбинации значений m, g, p. Здесь уравнение (2.5) или уравнение $A_2=0$ связывают группы неизвестных B, C, D, поэтому вся система (2.6) — (2.8) не распадается на подсистемы. Заметим, что этот случай при $n<55$ наступает лишь три раза: при $n=21$, 31, 33.

Учитывая это, значения N_i, N из таблицы, а также то, что для моментных систем большого порядка от двух переменных не разработаны общие методы решения их, можно сделать вывод о том, что квадратурные формулы сравнительно нетрудно получить для $n\leqslant 29$, $n\neq 21$.

Для $n\leqslant 29$, $p(x)\equiv 1$ приведем значения правых частей системы (2.2) — (2.8):

$$\alpha_1=2/7,\quad \alpha_2=4/35,\quad \alpha_3=1/105,\quad \alpha_4=16/945,$$
$$\beta_{10}=2^5/3^3\cdot 385,\quad \beta_{12}=2^8/3^4\cdot 5005,\quad \beta_{14}=2^9/3^5\cdot 5005,$$
$$\beta_{16}=2^{13}/3^6\cdot 85085,\quad \beta_{18}=2^{12}\cdot 67/3^7\cdot 1616615,\quad \beta_{20}=2^{16}/3^8\cdot 323323,$$
$$\beta_{22}=2^{17}\cdot 97/3^9\cdot 85085\cdot 437,\quad \beta_{24}=2^{20}\cdot 83/3^{10}\cdot 185910725,$$
$$\beta_{26}=2^{20}\cdot 139/3^{11}\cdot 185910725,\quad \beta_{28}=2^{23}\cdot 107/3^{12}\cdot 5^2\cdot 30808063,$$
$$\gamma_{12}=2^5/15015,\quad \gamma_{16}=2^5/85085,\quad \gamma_{20}=2^5/440895,$$
$$\gamma_{24}=2^5\cdot 37/79676025,\quad \gamma_{28}=2^5\cdot 107/1078282205,$$
$$\delta_0^1=2^5/4849845,\quad \delta_1^1=2^5/22309287,\quad \delta_2^1=2^5/98423325,$$
$$\delta_0^2=2^5/557732175,\quad \delta_1^2=2^5/2310604725.$$

Приведем две квадратурные формулы при $p(x)\equiv 1$.

$$n=19$$

$$A_1=1856/3095235=10^{-4}\cdot 5.99631368862,$$
$$A_2=606208/82219995=10^{-3}\cdot 7.37299971862,$$

$A_3=6490935/900204032=10^{-3}\cdot 7.21051536014;$
$B_1=10^{-3}\cdot 7.57439415905, \qquad B_2=10^{-3}\cdot 6.75382948631,$
$B_3=10^{-3}\cdot 7.11635549312;$
$m_1=0.974888643677, \qquad l_1=0.157467667204,$
$m_2=0.807089818360, \qquad l_2=0.417496122797,$
$m_3=0.291298882210, \qquad l_3=0.676441040011;$
$D_1=1773593/253693440=10^{-3}\cdot 6.99108735330,$
$r_1=0.882270011260, \qquad u_1=0.140355381171,$
$w_1=0.449332832327.$

Здесь m_i^2 — корни уравнения

$$243219t^3-319430t^2+92836t-3848=0,$$

а $\sigma_{21}=3/17, \quad \sigma_{31}=1/17\cdot 19.$

$$n=23$$

$A_1=2^7\cdot 73/5242545=10^{-3}\cdot 1.78234044724,$
$A_2=2^{14}\cdot 1663/3^3\cdot 11^2\cdot 1458821=10^{-3}\cdot 5.71690594998,$
$A_3=3^{10}\cdot 1599797/2^9\cdot 173^2\cdot 13^2\cdot 6545=10^{-3}\cdot 5.57338317884;$
$B_1=10^{-3}\cdot 5.51877146727, \qquad B_2=10^{-3}\cdot 5.15823771181,$
$B_3=10^{-3}\cdot 5.60870408259, \qquad B_4=10^{-3}\cdot 4.10677702817;$
$m_1=0.777493219315, \qquad l_1=0.444693317871,$
$m_2=0.912509096867, \qquad l_2=0.289246562758,$
$m_3=0.314196994183, \qquad l_3=0.671297344270,$
$m_4=0.982972302707, \qquad l_4=0.129933544765;$
$C_1=38^4/33^2\cdot 7^3\cdot 1105=10^{-3}\cdot 5.05184606462,$
$p_1=0.938319218138, \qquad q_1=0.345770219761;$
$D_1=19^2\cdot 23^6/7^3\cdot 2^6\cdot 3^2\cdot 6113965=10^{-3}\cdot 5.53024891623,$
$r_1=0.836036015482, \qquad u_1=0.159041710538,$
$w_1=0.525118572443.$

Здесь $1-m_k^2$ — корни уравнения

$$353533t^4-529549t^3+220210t^2-27932t+712=0,$$

а $v_1=2/19, \ \sigma_{21}=5/23, \ \sigma_{31}=49/19\cdot 23^2.$

Расположение узлов этих квадратур показано на фиг. 1, 2.

Описанный метод дает инвариантные относительно группы G_8^* квадратуры с минимальным числом узлов, для них $\eta\to 1$ при $n\to\infty$. Остаются неисследованными следующие вопросы:

1) когда все веса квадратур положительны (например, при $n=13$ (см. [6]) и при $n=25, 27$ некоторые веса отрицательны) и как при $n\to\infty$ ведет себя величина

$$H_n=6|A_1|+12|A_2|+8|A_3|+24\left(\sum_{k=1}^{N_1}|B_k|+\sum_{k=1}^{N_2}|C_k|+2\sum_{k=1}^{N_3}|D_k|\right) \tag{2.13}$$

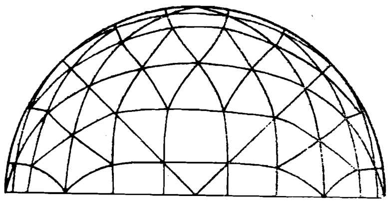
($H_n=1$, если все веса положительны);

2) когда для заданных n и $p(x)$ система уравнений имеет решение, соответствующее узлам, лежащим на сфере;

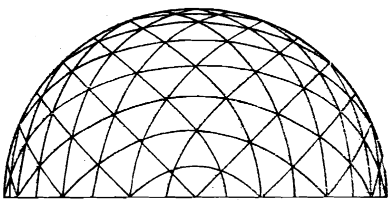
3) как асимптотически при $n \to \infty$ распределены на сфере узлы квадратур.

Можно высказать правдоподобную гипотезу, что квадратуры при $p(x) \equiv 1$, $g=2$, 5 существуют, веса их выравнены и положительны, а узлы образуют правильную, почти равномерную триангуляцию сферы (см. фиг. 2).

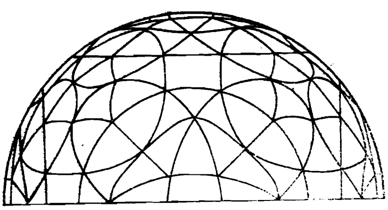
Аналогичным образом строятся квадратуры, в которых мы вместо условия $A_2=0$ требуем, чтобы $A_1=0$ или $A_3=0$. Существуют также квадратуры с другими соотношениями на N_1, N_2, N_3 (см. [6]). Упомянутые выше квадратуры содержат большее число узлов по сравнению с разобранными.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

§ 3

Можно поставить задачу о нахождении квадратур типа Чебышева (квадратур с одинаковыми весами). Известно, что применение равных весов минимизирует вероятностную ошибку, если значения $f(s)$ подвержены нормально распределенным вероятностным ошибкам. Тогда узлы квадратур находятся из решения нелинейной системы уравнений (2.2) — (2.8), в которой веса B_k, C_k, D_k считаются равными $1/N$, где $N = 24(N_1+N_2+2N_3)$, а $A_1=A_2=A_3=0$. Для $n=11$, $p(x)\equiv 1$ найдена квадратура типа Чебышева, содержащая 96 узлов:

$n=11$

$N_1=3$, $N_2=1$, $N_3=0$, $N=96$, $\eta=0.5$, $B_1=B_2=B_3=C_1=1/96$,

$m_1=0.963560905$, $l_1=0.189143308$,

$m_2=0.772965714$, $l_2=0.448622338$,

$m_3=0.239106144$, $l_3=0.686596043$,

$p_1=0.879538138$, $q_1=0.475828397$.

Аналогично, для $n=15$, $p(x)\equiv 1$

$N_1=4$, $N_2=1$, $N_3=1$, $N=168$, $\eta=0.508$,

$B_1=B_2=B_3=B_4=C_1=D_1=1/168$,

$m_1=0.409288638$, $l_1=0.645167734$,

$m_2=0.791685755$, $l_2=0.431991705$,

$m_3=0.920932787$, $l_3=0.275574664$,

$m_4=0.980272193,\quad l_4=0.139761275,$
$p_1=0.446625750,\quad q_1=0.894720872,$
$r_1=0.154999420,\quad u_1=0.593559863,\quad w_1=0.789722653.$

Расположение узлов этой квадратуры показано на фиг. 3. Узлы этих квадратур сосчитаны Л. А. Толмачевой по программе решения систем нелинейных уравнений. Вопрос о существовании квадратур типа Чебышева для $n\geqslant 17$ нуждается в дополнительных исследованиях. Вероятно, такие квадратуры следует искать при расположении узлов, характерных для описанных случаев при $g=2, 5$.

§ 4

Пусть $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(s)$ многочленом $P_n(s)$ степени n. Оценим погрешность квадратуры $S_n(f)$, точной для всех многочленов до n-й степени, через $E_n(f)$ [9].

Учитывая (2.13), получаем

$$R_n(f)=|I(f)-S_n(f)|=|I(f-P_n)-S_n(f-P_n)|\leqslant (H_n+1)E_n(f).$$

Если веса квадратуры положительные, то

$$R_n(f)\leqslant 2E_n(f).$$

Вычислим дисперсию $S_n(f)$ для $p(x)\equiv 1$. Пусть $\bar{P}_n(s)$ — многочлен степени n, дающий наилучшее в среднем приближение функции f (он совпадает с отрезком ряда Фурье разложения $f(s)$ по сферическим функциям до n-го порядка). Пусть $\bar{E}_n^2(f)=I((f-\bar{P}_n)^2)$, а $\varepsilon(s)=f(s)-\bar{P}_n(s)$. Очевидно, что $\bar{E}_n\leqslant E_n$ и

$$I(f)=S_n(\bar{P}_n). \tag{4.1}$$

Пусть SO(3) — группа вращения S, $g=g(\varphi,\theta,\psi)\in SO(3)$ — вещественная ортогональная матрица третьего порядка с единичным определителем, а φ,θ,ψ — углы Эйлера, задающие вращение: $0\leqslant\psi<2\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ [10].

Поскольку группа SO(3) для S транзитивна, то S является однородным пространством. Сфера S может быть реализована как пространство левых классов смежности по стационарной подгруппе H некоторой точки $a\in S$. Пусть

$$dg=\frac{1}{16\pi^2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi \tag{4.2}$$

есть мера на SO(3), тогда [11]

$$I(f)=\int\limits_{SO(3)} f(gs)\,dg.$$

Рассмотрим семейство квадратур

$$S_n(f,g)=S_n(f(gs)),$$

полученных применением квадратуры S_n к функции $f(gs)$. Поскольку пространства однородных многочленов степени k инвариантны относительно группы SO(3), то для любого многочлена $P(s)$ степени, не превышающей n, имеем

$$(4.3)\qquad S_n(P(s), g)=S_n(P(s)),$$

ибо $S_n(P)=I(P)=I(f(gs))=S_n(P(s), g)$.

Дисперсией $S_n(f)$ назовем величину

$$\mathbf{D}_n(f)=\int\limits_{SO(3)}[I(f)-S_n(f, g)]^2\,dg.$$

Оценим ее; согласно (4.1), (4.3), имеем

$$\mathbf{D}_n(f)=\int\limits_{SO(3)}[S_n(\bar{P}, g)-S_n(f, g)]^2\,dg=\int\limits_{SO(3)}[S_n(\varepsilon, g)]^2\,dg.$$

Применяя неравенство Буняковского и учитывая (2.13), (4.1), (4.3), получаем

$$\mathbf{D}_n(f)\leqslant H_n\int\limits_{SO(3)}\Bigl[|A_1|\sum_{i=1}^{6}\varepsilon^2(ga_i^1)+|A_2|\sum_{i=1}^{12}\varepsilon^2(ga_i^2)+$$

$$+|A_3|\sum_{i=1}^{8}\varepsilon^2(ga_i^3)+\sum_{k=1}^{N_1}|B_k|\sum_{i=1}^{24}\varepsilon^2(gb_i^k)+\sum_{k=1}^{N_2}|C_k|\sum_{i=1}^{24}\varepsilon^2(gc_i^k)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N_3}|D_k|\sum_{i=1}^{48}\varepsilon^2(gd_i^k)\Bigr]dg=H_n^2I(\varepsilon^2),$$

т. е.

$$(4.4)\qquad \mathbf{D}_n(f)\leqslant H_n^2\bar{E}_n^2(f).$$

§ 5

Приемы с использованием простейшего типа симметрии для повышения точности квадратур со случайными узлами были предложены в [11]. Используя симметрию группы G_8^* и транзитивность группы SO(3), мы предложим следующий метод Монте-Карло для вычисления $I(f)$. Пусть $P_j(\varphi_j, \theta_j, \psi_j)$, $j=1, 2, \ldots, Q$, есть Q случайных, попарно-независимых точек, одинаково распределенных на S с распределением dg (4.2), тогда $g_j=g(\varphi_j, \theta_j, \psi_j)$ — случайный элемент SO(3).

Положим $S_{nj}(f)=S_n(f, g_j)$; случайные величины $S_{nj}(f)$ попарно-независимы и одинаково распределены; математическое ожидание $\mathbf{M}$ и дисперсия $\mathbf{D}$ их равны

$$\mathbf{M}S_{nj}(f)=\int\limits_{SO(3)}S_n(f, g)\,dg=S_n(I(f))=I(f)$$

и, согласно (4.4), (4.3),

$$\mathbf{D}(S_{nj}(f))=\mathbf{D}(f)\leqslant H_n^2\bar{E}_n^2(f).$$

Положим

$$J_{Qn}(f) = Q^{-1}\sum_{j=1}^{Q} S_{nj}(f).$$

Тогда, применяя стандартную технику доказательств, имеем

$$\mathbf{M}J_{Qn}(f) = Q^{-1}\sum_{j=1}^{Q}\mathbf{M}S_{nj}(f) = I(f),$$

а

$$\mathbf{D}(J_{Qn}(f)) = Q^{-2}\sum_{j=1}^{Q}\mathbf{D}(S_{nj}(f)) = Q^{-1}\mathbf{D}(f).$$

С вероятностью $1-\eta$ выполняется неравенство Чебышева

$$|I(f) - J_{Qn}(f)| \leqslant \left(\frac{\mathbf{D}(f)}{Q\eta}\right)^{1/2} \leqslant \frac{H_n\bar{E}_n(f)}{(Q\eta)^{1/2}}.$$

Если точки P_j еще и независимы в совокупности, то с вероятностью, асимптотически близкой при $Q\to\infty$ к $p(y)$, имеем

$$|I(f) - J_{Qn}(f)| \leqslant \frac{yH_n\bar{E}_n(f)}{Q^{1/2}},$$

где

$$p(y) = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_y^\infty \exp(-t^2/2)\,dt.$$

Примечания. 1. Веса и узлы квадратурной формулы 29-го порядка для сферы опубликованы в [12].

2. В работах [6, 13] автором допущены следующие неточности:

а) в таблице узлов для формулы 9.3 работы [6] координату l_1 следует поделить на $\sqrt{10}$, а в формуле 17.1 положить: $m_2=0.828769981253$, $l_2=0.395689473056$, $m_3=0.215957291846$, $A_3=0.00979373751249$, $B_1=0.00821173728319$;

б) при выводе квадратуры $(2m+1)$-го порядка для сферы в m-мерном пространстве в [13] учтены не все инвариантные многочлены.

Поступила в редакцию 8.04.1974
Переработанный вариант 27.11.1975

Цитированная литература

1. *С. Л. Соболев.* О формулах механических квадратур на поверхности сферы. Сибирский матем. ж., 1962, 3, № 5, 486–496.
2. *В. А. Диткин, Л. А. Люстерник.* Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере. В сб. «Вычисл. матем. и вычисл. техн.». Вып. 1. М., Ин-т точной механ. и вычисл. техн. АН СССР, 1953, 3–13.
3. *И. П. Мысовских.* О кубатурных формулах для вычисления интегралов на поверхности сферы. Сибирский матем. ж. 1964, 5, № 3, 721–723.
4. *А. Д. Мак-Ларен.* Формулы кубатуры на шаре. Докл. АН СССР, 1963, 151, № 5, 1029–1030; *A. D. McLaren.* Optimal numerical integration on a sphere. Math. Comput, 1963, 17, № 83, 361–383.

5. *Г. Н. Салихов.* Об одном способе повышения эффективности кубатурных формул С. Л. Соболева на сфере. В сб. «Вопр. вычисл. и прикл. матем.» Вып. 8. Ташкент, Ин-т кибернетики АН УзССР, 1971, 3–9.
6. *В. И. Лебедев.* Значение узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса – Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, 15, № 1, 48–54.
7. *Г. И. Марчук, В. И. Лебедев.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1971.
8. *М. Г. Крейн, А. Л. Нудельман.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., «Наука», 1973.
9. *Л. В. Канторович.* Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, 28, 3–25.
10. *Н. Я. Виленкин.* Специальные функции и теория представления групп. М., «Наука», 1965.
11. *Н. С. Бахвалов.* О приближенном вычислении кратных интегралов. Вестн. МГУ. Сер. матем., 1959, 4, 3–18.
12. *В. И. Лебедев.* Об одном способе интерполяции в n-мерном пространстве по произвольным узлам и некоторых квадратурных формулах. Тр. семинара «Вычисл. методы прикл. матем.». Вып. 10. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1975, 1–10.
13. *В. И. Лебедев.* Вычисление квадратур типа Гаусса – Маркова для областей и весов, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией. В сб. «Вопросы вычисл. и прикл. матем.». Вып. 32. Ташкент, ИК с ВЦ АН УзССР, 1975, 77–84.