

УДК 519

## КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СФЕРЫ 59-ГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

© 1994 г. В. И. Лебедев

Представлено академиком Г.И. Марчуком 08.07.93 г.

Поступило 21.10.93 г.

В настоящей работе приведены координаты узлов и весов квадратурной формулы типа Гаусса для единичной трехмерной сферы 59-го алгебраического порядка точности, инвариантной относительно группы октаэдра с инверсией. Теория и численные методы получения квадратур указанного типа описаны в [1 - 4].

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbf{R}_3(x, y, z)$  задана сфера  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$  и вписанный в  $S$  октаэдр с вершинами на осях координат. Пусть

$$I(f) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(s) ds = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (1)$$

где  $s \in S$ . Квадратуру 59-го алгебраического порядка точности возьмем в виде

$$I_{59}(f) = A_1 \sum_{i=1}^6 f(a_i^1) + A_2 \sum_{i=1}^8 f(a_i^2) + A_3 \sum_{i=1}^{12} f(a_i^3) + \\ + \sum_{k=1}^{13} B_k \sum_{i=1}^{24} f(b_i^k) + \sum_{k=1}^4 C_k \sum_{i=1}^{24} f(c_i^k) + \sum_{k=1}^{16} D_k \sum_{i=1}^{46} f(d_i^k), \quad (2)$$

где координаты точек при весах  $A_1, A_2, A_3, B_k, C_k, D_k$  имеют вид

$$A_1: (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1); \\ A_2: (\pm 2^{-1/2}, \pm 2^{-1/2}, 0), (\pm 2^{-1/2}, 0, \pm 2^{-1/2}), \\ (0, \pm 2^{-1/2}, \pm 2^{-1/2}); \\ A_3: (\pm 3^{-1/2}, \pm 3^{-1/2}, \pm 3^{-1/2}); \\ B_k: (\pm l_k, \pm m_k, \pm l_k), (\pm m_k, \pm l_k, \pm l_k), (\pm l_k, \pm l_k, \pm m_k), \\ l_k = 2^{-1/2} (1 - m_k^2)^{1/2};$$

$$C_k: (\pm q_k, \pm r_k, 0), (\pm r_k, \pm q_k, 0), (\pm q_k, 0, \pm r_k), \\ (\pm r_k, 0, \pm q_k), (0, \pm q_k, \pm r_k), (0, \pm r_k, \pm q_k),$$

$$r_k = (1 - q_k^2)^{1/2};$$

$$D_k: (\pm u_k, \pm v_k, \pm w_k), (\pm u_k, \pm w_k, \pm v_k), \\ (\pm v_k, \pm u_k, \pm w_k), (\pm v_k, \pm w_k, \pm u_k), \\ (\pm w_k, \pm u_k, \pm v_k), (\pm w_k, \pm v_k, \pm u_k),$$

$$u_k^2 + v_k^2 + w_k^2 = 1.$$

В табл. 1 приведены с двенадцатью значащими цифрами значения весов  $A_1, A_2, A_3$  и координаты образующих узлов и соответствующие им веса по группам: в группе  $B - (l_k, m_k, B_k)$ , в группе  $C - (q_k, r_k, C_k)$ , в группе  $D - (u_k, v_k, w_k, D_k)$ .

Квадратурная формула (2) содержит 1202 узла и точно интегрирует все 3600 сферических гармоник до 59-го порядка включительно; ее коэффициент эффективности  $\eta$  [1] равен 0.9983.

На рис. 1 приведена сетка на сфере, построенная по узлам квадратурной формулы (2). Видно, что узлы квадратуры правильно, почти равномерно триангулируют поверхность сферы, а табл. 1 показывает, что веса квадратуры положительны и выравнены (точнее, их значения пропорциональны площадям треугольников, окружающих каждый узел). Следовательно, гипотеза автора о существовании подобных квадратур типа Гаусса алгебраической степени точности при  $n = 12m + 11, m = 0, 1, \dots$ , подтвердилась и на этот раз.

Параметры квадратуры получены применением усовершенствованных методов и оценок, изложенных в [4]; при этом была использована новая модифицированная автором версия программы на языке Фортран, написанная А.Л. Скороходовым для получения квадратур 41-, 47-, 53-го порядков [4]. Расчеты проведены на ЭВМ типа "CYBER" с двойной точностью, имеющей мантиссу длины 32 десятичных разряда.

Российский научный центр "Курчатовский институт", Москва

Институт вычислительной математики Российской Академии наук, Москва

Таблица 1

$A_1 = .110518923327D-03$					$A_2 = .920523273809D-03$					$A_3 = .913315978645D-03$					
Группа B															
$k$	$l_k$				$m_k$				$B_k$						
1	.371263644966D-01				.998620681800D+00				.369042189802D-03						
2	.914006041226D-01				.991610739722D+00				.560399092868D-03						
3	.153107785247D+00				.976276606395D+00				.686529762928D-03						
4	.218092889166D+00				.951247067481D+00				.772033855115D-03						
5	.283987453220D+00				.915806886209D+00				.830154595889D-03						
6	.349117760096D+00				.869616915182D+00				.868669255018D-03						
7	.412143146144D+00				.812573722300D+00				.892707628585D-03						
8	.471899362715D+00				.744729469632D+00				.906082023857D-03						
9	.527314545284D+00				.666242253736D+00				.911977725494D-03						
10	.620947533244D+00				.478380938077D+00				.912872013860D-03						
11	.656972271186D+00				.369830866459D+00				.913071493569D-03						
12	.684178830907D+00				.252583955701D+00				.915287378455D-03						
13	.701260433012D+00				.128326186660D+00				.918743627432D-03						
Группа C															
$k$	$q_k$				$r_k$				$C_k$						
1	.107238221548D+00				.994233354821D+00				.517697731297D-03						
2	.258206895950D+00				.966089643296D+00				.733114368210D-03						
3	.417275295531D+00				.908780131682D+00				.846323283638D-03						
4	.570036691179D+00				.821619237061D+00				.903112269425D-03						
Группа D															
$k$	$u_k$				$v_k$				$w_k$				$D_k$		
1	.982798601826D+00				.177177402262D+00				.521063947701D-01				.648577845316D-03		
2	.962424923033D+00				.247571646343D+00				.111564095716D+00				.743503091098D-03		
3	.940200799413D+00				.335461628907D+00				.590588885324D-01				.799852789184D-03		
4	.932082204014D+00				.317361524661D+00				.174655167758D+00				.810173149747D-03		
5	.904367419939D+00				.409026842709D+00				.121723505110D+00				.848338957459D-03		
6	.891240756007D+00				.385429115067D+00				.239027847938D+00				.855629925731D-03		
7	.867643562846D+00				.493222118485D+00				.626625062415D-01				.880320867974D-03		
8	.858197998604D+00				.478532067592D+00				.185750519455D+00				.881104818243D-03		
9	.839675362405D+00				.450742259316D+00				.302946697353D+00				.885028234127D-03		
10	.816528856402D+00				.563212302076D+00				.126777480068D+00				.902134229904D-03		
11	.801546937078D+00				.543430356969D+00				.249411216236D+00				.901009167711D-03		
12	.777356306907D+00				.512351848642D+00				.364983226060D+00				.902269293843D-03		
13	.766162121390D+00				.639427963475D+00				.642454922422D-01				.915801617469D-03		
14	.755358414353D+00				.626980550902D+00				.190601822278D+00				.913157800319D-03		
15	.734430575756D+00				.603116169310D+00				.311227594715D+00				.910781357948D-03		
16	.704383718402D+00				.569370249847D+00				.423864478152D+00				.910576025897D-03		

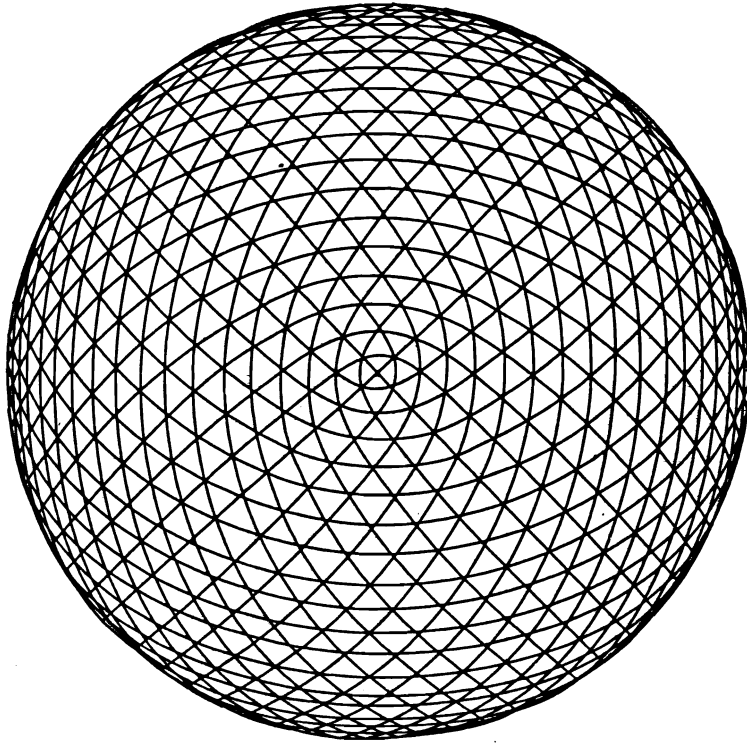


Рис. 1.

Приведенная квадратура пригодна для вычисления интегралов по поверхностям областей звездного типа и построения на них правильных треугольных сеток. Для этого достаточно в поверхностном интеграле перейти к сферическим координатам, преобразовав тем самым его в интеграл по сфере.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-012-594).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев В.И. // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. № 2. С. 293 - 306.
2. Лебедев В.И. // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18. № 1. С. 132 - 142.
3. Лебедев В.И. Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Тр. конф. по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике. Новосибирск, 1978. С. 110 - 114.
4. Лебедев В.И., Скороходов А.Л. // ДАН. 1992. Т. 324. № 3. С. 519 - 524.