Доклады Академии наук
1992. Том 324, № 3

УДК 519 МАТЕМАТИКА

© В.И. ЛЕБЕДЕВ, А.Л. СКОРОХОДОВ

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СФЕРЫ 41-, 47- И 53-ГО ПОРЯДКОВ

(Представлено академиком Г.И. Марчуком 13 II 1992)

В настоящей работе приводятся координаты узлов и веса инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией квадратур 41-, 47- и 53-го порядка для трехмерной сферы.

В работе [1] С.Л. Соболевым был предложен новый подход к построению инвариантных относительно некоторой группы вращений G квадратурной формулы: было показано (теорема 1), что для построения инвариантной квадратуры, точной для всех функций из конечномерного векторного пространства Ψ, инвариантного относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы искомая квадратура была точна для всех инвариантных относительно G функций, образующих подпространство $\Phi \subseteq \Psi$ (см. также [2]). Поскольку размерность Φ, как правило, значительно меньше размерности Ψ, то задача построения инвариантной квадратуры существенно облегчается.

В [3] этот подход был развит для построения инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией G_*^8 квадратур типа Гаусса–Маркова для трехмерной сферы S в $R^3(x, y, z)$. За пространство Ψ было взята пространство, образованное следами на S многочленов от (x, y, z) степени не выше n, а за подпространство Φ – следами на S многочленов соответствующих степеней от $\sigma_2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$ и $\sigma_3 = x^2y^2z^2$. Многочлены σ_2 и σ_3 вместе с $\sigma_1 = x^2 + y^2 + z^2$ являются образующими алгебры многочленов от (x, y, z) относительно группы преобразований G_*^8.

Таким образом, если неизвестными в системе уравнений, определяющими параметры квадратуры, считать $(P_k, \sigma_{2k}, \sigma_{3k})$ – веса и значения σ_2, σ_3 в (неизвестных) узлах квадратуры, то наряду с уменьшением количества уравнений в подлежащей решению нелинейной моментной системе от двух переменных значительно понизится и ее алгебраический порядок.

Базис в пространстве Φ можно выбрать таким, чтобы исходная система уравнений имела блочно-треугольный вид относително определенных групп неизвестных, т.е. распалась на независимо решаемые подсистемы. Отметим, что каждое уравнение этих подсистем является алгебраической симметрической функцией группы неизвестных $(P_k, \sigma_{2k}, \sigma_{3k})$. Соответствующая процедура подробно описана в [3], и она очевидным образом применима для получения квадратур типа Гаусса–Маркова, когда S есть сфера или область в R^m, $m \geqslant 2$, инвариантная относительно группы октаэдра с инверсией (тогда следует положить $\sigma_1 = \Sigma x_i^2$, $\sigma_2 = \sum_{i \neq j} x_i x_j, \ldots, \sigma_m = \Pi x_i^2$) или других групп вращений.

Назовем **порядком квадратуры** наивысшую степень многочленов, которые точно интегрируются данной квадратурой. До настоящего времени описан-

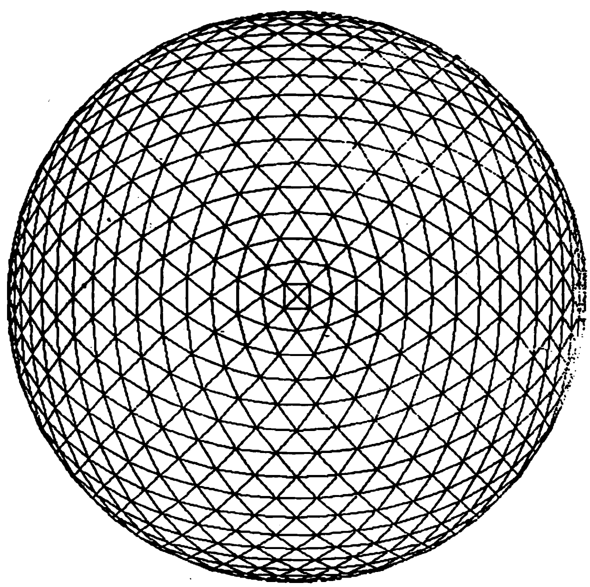

Рис. 1. Узлы квадратуры 53-го порядка

ным методом для сферы в R^3 были построены квадратуры 35-го и некоторых низших порядков [3–5]. В предлагаемой работе приводятся координаты узлов и веса инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией G^8_* квадратур 41-, 47- и 53-го порядков.

Введем необходимые о б о з н а ч е н и я. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $R^3(x, y, z)$ задана сфера $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и вписанный в S октаэдр с вершинами на осях координат. Пусть

$$I(f) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(\omega) d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\varphi, \theta) \sin\theta \, d\theta,$$

где $\omega \in S$. Будем искать квадратуру n-го порядка (n – нечетное число), правильно интегрирующую первые $(n + 1)^2$ многочлена на сфере, в виде

$$I_n(f) = A_1 \sum_{i=1}^{6} f(a_i^1) + A_2 \sum_{i=1}^{8} f(a_i^2) + A_3 \sum_{i=1}^{12} f(a_i^3) + \sum_{k=1}^{N_1} B_k \sum_{k=1}^{24} f(b_i^k) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N_2} C_k \sum_{i=1}^{24} f(c_i^k) + \sum_{k=1}^{N_3} D_k \sum_{i=1}^{48} f(d_i^k),$$

где координаты точек групп A_1, A_2, A_3, B, C, D имеют вид

A_1: $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$;

A_2: $(\pm 2^{-1/2}, \pm 2^{-1/2}, 0)$, $(\pm 2^{-1/2}, 0, \pm 2^{-1/2})$, $(0, \pm 2^{-1/2}, \pm 2^{-1/2})$;

A_3: $(\pm 3^{-1/3}, \pm 3^{-1/2}, \pm 3^{-1/2})$;

B: $(\pm l_k, \pm m_k, \pm l_k)$, $(\pm m_k, \pm l_k, \pm l_k)$, $(\pm l_k, \pm l_k, \pm m_k)$,

$l_k = 2^{-1/2}(1 - m_k^2)^{1/2}$;

Таблица 1

Квадратура 41 порядка

A_1 = .3095121295 D – 003, A_2 = 0, A_3 = .1852379698 D – 02

Группа B

k	l_k	m_k	B_k
1	.6095034115 D – 01	.9962781297 D + 00	.9764331164 D – 03
2	.1459036449 D + 00	.9784805837 D + 00	.1384737234 D – 02
3	.2384736701 D + 00	.9414141582 D + 00	.1617210647 D – 02
4	.3317920736 D + 00	.8830787279 D + 00	.1749564657 D – 02
5	.4215761784 D + 00	.8028368773 D + 00	.1818471778 D – 02
6	.5044419707 D + 00	.7007685753 D + 00	.1846715956 D – 02
7	.6372546939 D + 00	.4333738687 D + 00	.1852028828 D – 02
8	.6807744066 D + 00	.2703560883 D + 00	.1858812585 D – 02
9	.7040954938 D + 00	.9219040707 D – 01	.1871790639 D – 02

Группа C

k	q_k	r_k	C_k
1	.1724782009 D + 00	.9850133350 D + 00	.1300321685 D – 02
2	.3964755348 D + 00	.9180452877 D + 00	.1705153996 D – 02
3	.6116843442 D + 00	.7911019296 D + 00	.1857161196 D – 02

Группа D

k	u_k	v_k	w_k	D_k
1	.8213021581 D – 01	.2778673190 D + 00	.9571020743 D + 00	.1555213603 D – 02
2	.8999205842 D – 01	.5033564271 D + 00	.8593798558 D + 00	.1802239128 D – 02
3	.1816640840 D + 00	.5984126497 D + 00	.7803207424 D + 00	.1849830560 D – 02
4	.1720795225 D + 00	.3791035407 D + 00	.9092134750 D + 00	.1713904507 D – 02
5	.2634716655 D + 00	.4742392842 D + 00	.8400474883 D + 00	.1802658934 D – 02
6	.3518280927 D + 00	.5610263808 D + 00	.7493106119 D + 00	.1842866472 D – 02

C: $(\pm q_k, \pm r_k, 0)$, $(\pm r_k, \pm q_k, 0)$, $(0, \pm q_k, \pm r_k)$, $(0, \pm r_k, \pm q_k)$,

$(\pm q_k, 0, \pm r_k)$, $(\pm r_k, 0, \pm q_k)$, $r_k = (1 - q_k^2)^{1/2}$;

D: $(\pm u_k, \pm v_k, \pm w_k)$, $(\pm u_k, \pm w_k, \pm v_k)$, $(\pm v_k, \pm u_k, \pm w_k)$,

$(\pm v_k, \pm w_k, \pm u_k)$, $(\pm w_k, \pm u_k, \pm v_k)$, $(\pm w_k, \pm v_k, \pm u_k)$.

Число точек N_i, i = 1, 2, 3, в группах B, C, D выбирается так, чтобы общее число неизвестных в получаемой системе уравнений было равно числу уравнений. Так, для $n = 12m + 5$, $m = 1, 2, \ldots$: $N_1 = 3m$, $N_2 = m$, $N_3 = m(m-1)$, и в квадратуру не следует включать точки группы A_2, формально полагая $A_2 = 0$; для $n = 12m + 11$: $N_1 = 3m + 1$, $N_2 = m$, $N_3 = m^2$ (см. [3]). Для квадратур указанных выше порядков и величин N_i возможна правильная, почти равномерная триангуляция сферы (см. [1]) и в [3] на основании расчетов для n = 23 была высказана гипотеза, подтвердившаяся затем и при расчетах для n = 29; 35 (см. [4, 5]), что квадратуры этих порядков существуют, их узлы правильно триангулируют сферу и веса вырав-

Таблица 2

Квадратура 47 порядка

A_1 = .2192942090 D – 03, A_2 = .1436433617 D – 02, A_3 = .1421940344 D – 02

Группа B

k	l_k	m_k	B_k
1	.5087204410 D – 01	.9974086776 D + 00	.6798123510 D – 03
2	.1228198790 D + 00	.9847997535 D + 00	.9913184235 D – 03
3	.2026890814 D + 00	.9580366759 D + 00	.1180207833 D – 02
4	.2847745156 D + 00	.9153179504 D + 00	.1296599602 D – 02
5	.3656719078 D + 00	.8559019286 D + 00	.1365871427 D – 02
6	.4428264886 D + 00	.7796213195 D + 00	.1402988604 D – 02
7	.5140619627 D + 00	.6866444472 D + 00	.1418645563 D – 02
8	.6306401219 D + 00	.4523119203 D + 00	.1421376741 D – 02
9	.6716883332 D + 00	.3125213050 D + 00	.1423996475 D – 02
10	.6979792685 D + 00	.1601558034 D + 00	.1431554042 D – 02

Группа C

k	q_k	r_k	C_k
1	.1446865674 D + 00	.9894775374 D + 00	.9254401499 D – 03
2	.3390263475 D + 00	.9407768787 D + 00	.1250239995 D – 02
3	.5335804651 D + 00	.8457493051 D + 00	.1394365843 D – 02

Группа D

k	u_k	v_k	w_k	D_k
1	.6944024393 D – 01	.2355187894 D + 00	.9693858634 D + 00	.1127089094 D – 02
2	.2269004109 D + 00	.4102182474 D + 00	.8833103605 D + 00	.1345753761 D – 02
3	.8025574608 D – 01	.6214302417 D + 00	.7793481057 D + 00	.1424957283 D – 02
4	.1467999527 D + 00	.3245284345 D + 00	.9344148270 D + 00	.1261523341 D – 02
5	.1571507769 D + 00	.5224482189 D + 00	.8380641334 D + 00	.1392547106 D – 02
6	.2365702993 D + 00	.6017546634 D + 00	.7628406246 D + 00	.1418761677 D – 02
7	.7714815866 D – 01	.4346575516 D + 00	.8972853361 D + 00	.1338366684 D – 02
8	.3062936666 D + 00	.4908826589 D + 00	.8156092232 D + 0	.1393700862 D – 02
9	.3822477379 D + 00	.5648768149 D + 00	.7313007936 D + 00	.1415914757 D – 02

нены и положительны. Эта гипотеза подтверждается также и результатами настоящей работы (на рис. 1 представлено расположение узлов квадратуры 53-го порядка). В то же время квадратуры промежуточных порядков могут иметь отрицательные веса (n = 25; 27, см. [4]). Этим объясняется, почему мы искали квадратуры 41-, 47- и 53-го порядков.

Для наших значений n система распадается на две подсистемы AB и CD (в терминологии [3]). Подсистема AB является моментной системой от одной переменной и решается известным прямым методом (см. [3]). Подсистема CD является моментной системой от двух переменных σ_2 и σ_3, и мы решали ее итерационным методом типа Ньютона.

Опишем вкратце расчеты, проводившиеся на ЭВМ "Эльбрус-2", имеющей мантиссу длиной 34 десятичных разрядов для чисел с двойной точностью. Подсисте-

Таблица 3

Квадратура 53 порядка

A_1 = .1438294190 D – 03, A_2 = 0, A_3 = .1125772288 D – 02

Группа *B*

k	l_k	m_k	B_k
1	.4292963545 D – 01	.9981553450 D + 00	.4948029342 D – 03
2	.1051426854 D + 00	.9888832243 D + 00	.7357990108 D – 03
3	.1750024867 D + 00	.9688902204 D + 00	.8889132771 D – 03
4	.2477653379 D + 00	.9366027304 D + 00	.9888347838 D – 03
5	.3206567123 D + 00	.8912679426 D + 00	.1053299681 D – 02
6	.3916520749 D + 00	.8325967237 D + 00	.1092778807 D – 02
7	.4590825874 D + 00	.7605829053 D + 00	.1114389394 D – 02
8	.5214563888 D + 00	.6754009691 D + 00	.1123724788 D – 02
9	.6253170244 D + 00	.4668589056 D + 00	.1125239325 D – 02
10	.6637926744 D + 00	.3446136542 D + 00	.1126153271 D – 02
11	.6910410398 D + 00	.2119541518 D + 00	.1130286931 D – 02
12	.7052907007 D + 00	.7162440144 D – 01	.1134986534 D – 02

Группа *C*

k	q_k	r_k	C_k
1	.1236686762 D + 00	.9923235654 D + 00	.6823367927 D – 03
2	.2940777114 D + 00	.9557815124 D + 00	.9454158160 D – 03
3	.4697753849 D + 00	.8827859807 D + 00	.1074429975 D – 02
4	.6334563241 D + 00	.7737784472 D + 00	.1129300086 D – 02

Группа *D*

k	u_k	v_k	w_k	D_k
1	.5974048614 D – 01	.2029128752 D + 00	.9773727228 D + 00	.8436884500 D – 03
2	.1375760408 D + 00	.4602621942 D + 00	.8770584618 D + 00	.1075255720 D – 02
3	.3391016526 D + 00	.5030673999 D + 00	.7949422999 D + 00	.1108577236 D – 02
4	.1271675191 D + 00	.2817606422 D + 00	.9510201693 D + 00	.9566475323 D – 03
5	.2693120740 D + 00	.4331561291 D + 00	.8601434616 D + 00	.1080663250 D – 02
6	.1419786452 D + 00	.6256167358 D + 00	.7671021862 D + 00	.1126797131 D – 02
7	.6709284600 D – 01	.3798395216 D + 00	.9226161107 D + 00	.1022568715 D – 02
8	.7057738183 D – 01	.5517505421 D + 00	.8310175524 D + 00	.1108960267 D – 02
9	.2783888477 D + 00	.6029619156 D + 00	.7476206108 D + 00	.1122790653 D – 02
10	.1979578938 D + 00	.3589606329 D + 0	.9121183784 D + 00	.1032401847 D – 02
11	.2087307061 D + 00	.5348666438 D + 00	.8187485362 D + 00	.1107249382 D – 02
12	.4055122137 D + 00	.5674997546 D + 00	.7165918454 D + 00	.1121780048 D – 02

Таблица 4

Порядок квадратуры	N	η
41	590	0,997
47	770	0,997
53	974	0,998

му CD решали до установления 26 десятичных знаков в решении. Если численно определить все необходимые величины, то окажутся выполненными условия теоремы 1, из [6, гл. 18, § 3] (о сходимости метода Ньютона). Из этой теоремы тогда следует, в частности, что в окрестности найденного нами приближенного решения существует точное решение подсистемы CD.

Также нами подсчитана относительная точность вычисленных квадратур $\epsilon_n = \sup_j(|I(p_j) - I_n(p_j)|/I(p_j))$, где p_j – все те многочлены, для которых должны быть точны найденные квадратуры. Оказалось, что для всех $n = 41$; 47; 53 величина ϵ_n имеет порядок 10^{-13}.

Далее в табл. 1–3 для квадратур 41-, 47- и 53-го порядков приведены значения весов A_1, A_2, A_3 и координаты образующих узлов и соответствующие им веса по группам: в группе B – (l_k, m_k, B_k), в группе C – (q_k, r_k, C_k), в группе D – (u_k, v_k, w_k, D_k).

В табл. 4 расположены: величина N – общее число узлов квадратуры, величина $\eta = (n+1)^2/3N$, характеризующая качество квадратуры [3].

Авторы признательны С.А. Финогенову за модификацию пакета графических программ и построение рисунка.

Институт вычислительной математики
Российской Академии наук
Москва

Поступило
21 II 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* – Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 5, с. 769–796. 2. *Мысовских И.П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981. 3. *Лебедев В.И.* – ЖВМиМФ, 1976, т. 16, № 2, с. 293–306. 4. *Лебедев В.И.* – Сиб. мат. журн., 1977, т. 18, № 1, с. 132–142. 5. *Лебедев В.И.* – Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Тр. конф. по дифференц. уравнениям и вычисл. математике. Новосибирск, 1978, с. 110–114. 6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.