

## ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ЧАСТОТЕ И ДИФфуЗИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В РЕЗОНАНСНЫХ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛИНИЯХ

*М. М. Баско*

Проведен анализ перераспределения по частоте при рассеянии в резонансных линиях ионов с большим зарядом остатка  $Z$ , когда нарушается гипотеза о полном перераспределении. Подробно рассмотрена задача об эволюции профиля линии в бесконечной однородной среде. Показано, что в лоренцовских крыльях фойгтовского профиля линия расширяется по закону  $\Delta\nu \propto t^{1/4}$ . Решения для бесконечной однородной среды использованы для оценки длины термализации  $t_{th}$ . Найденные асимптотические формулы для  $t_{th}$  совпадают с полученными в предположении о полном перераспределении в доплеровском ядре фойгтовского контура и существенно отличаются от них в лоренцовских крыльях. Длина термализации оценивается также и для таких значений параметров, при которых основная роль в перераспределении по частоте переходит к нарушению когерентности из-за ограниченности во времени процесса рассеяния.

Открытие эмиссионных рентгеновских линий в спектрах космических рентгеновских источников [1] и попытки их объяснения в рамках существующих моделей [2, 3] заставляют пересмотреть некоторые результаты существующей теории переноса излучения в линиях. Эта теория, развитая в предположении о полном перераспределении по частоте в каждом акте резонансного рассеяния [4], вполне пригодна для оптических и ультрафиолетовых резонансных линий ионов с малыми  $Z$ . Пригодность приближения о полном перераспределении обычно оправдывается тем, что ширина контура поглощения  $\sigma(\nu)$  обусловлена взаимодействием с окружающими частицами плазмы (линейный эффект Штарка для водородоподобных ионов), положение которых в пространстве меняется за времена, много меньшие, чем время жизни возбужденного состояния  $\Gamma^{-1}$ . С ростом  $Z$ , однако, линейный эффект Штарка убывает  $\propto Z^{-1}$  (предполагается, что плазма состоит в основном из водорода с малыми добавлениями тяжелых элементов), естественная ширина линии растет:  $\Gamma \propto Z^4$ , а тепловая скорость частиц в том интервале температур, где формируется резонансная линия, растет лишь  $\propto Z$ . Уже отсюда ясно, что предположение о полном перераспределении должно нарушаться при достаточно больших  $Z$ . Так, например, оно совершенно непригодно для резонансных линий водородо- и гелиеподобных ионов железа при плотностях  $N < 10^{22} \text{ см}^{-3}$  [5].

В этих условиях задача о переносе излучения в линии должна решаться для реальной функции перераспределения, которая получается при конкретном анализе процесса резонансного рассеяния. Но уже в простейших пространственно неоднородных случаях эта проблема приводит к громадным математическим трудностям [6]. В связи с этим для качественного анализа физической ситуации и порядковых оценок особое значение приобретает понятие длины термализации  $t_{th}$  (подробнее см. ниже). В данной работе длина термализации оценивается, исходя из закона расплывания профиля линии по частоте в бесконечной однородной среде для случаев, когда предположение о полном перераспределении оказывается непригодным.

## 1. Кинетическое уравнение

Кинетическое уравнение, описывающее поведение профиля линии в бесконечной однородной среде, имеет вид

$$\frac{\partial n(t, x)}{N_z c \partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ n(t, x') \frac{d\sigma(x' \rightarrow x)}{dx} - n(t, x) \frac{d\sigma(x \rightarrow x')}{dx'} \right] dx', \quad (1)$$

где  $x = (\nu - \nu_0) / \Delta\nu_D$  — безразмерная частота, отсчитываемая от центра линии  $\nu = \nu_0$  и нормированная на доплеровскую ширину  $\Delta\nu_D = \nu_0 (2kT / Am_p c^2)^{1/2}$ ;  $d\sigma(x \rightarrow x') / dx'$  — дифференциальное (по частоте!) сечение резонансного рассеяния;  $n(t, x) dx$  — число фотонов в единице объема в интервале частот  $(x, x + dx)$ ;  $N_z$  — число ионов, рассеивающих данную линию, в единице объема.

Уравнение (1) написано в предположении, что в пределах контура линии  $|\nu - \nu_0| \ll \nu_0$ , и отличем множителей типа  $(\nu' / \nu)^2$  от единицы можно пренебречь. В рамках этого приближения члены, ответственные за индуцированное рассеяние, взаимно сокращаются; термодинамическое равновесие осуществляется при  $n(t, x) = \text{const}$ , а принцип детального равновесия сводится к условию симметрии дифференциального сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma(x \rightarrow x')}{dx'} = \frac{d\sigma(x' \rightarrow x)}{dx}. \quad (2)$$

В дальнейшем вместо дифференциального сечения нам удобнее будет пользоваться понятием функции перераспределения

$$R(x, x') = \frac{1}{\Sigma} \frac{d\sigma(x \rightarrow x')}{dx'}, \quad (3)$$

где величина

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(x \rightarrow x')}{dx'} dx' = \frac{\pi e^2}{m_e c} \frac{f_{12}}{\Delta\nu_D} \quad (4)$$

определяется силой осциллятора  $f_{12}$  резонансного перехода  $1 \rightarrow 2$ .

## 2. Функция перераспределения

Если влиянием окружающих частиц плазмы можно пренебречь, то в системе покоя рассеивающего иона функция перераспределения по частоте имеет вид

$$R(x, x') = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2} \delta(x - x'). \quad (5)$$

Здесь мы ввели безразмерную естественную ширину линии  $a = \Gamma / 4\pi \Delta\nu_D$ . Переходя в лабораторную систему и усредняя по максвелловскому распределению скоростей рассеивающих ионов [7], из (5) получаем функцию перераспределения

$$R(x, x') = \pi^{-2} \int_0^{\infty} \left( \arctg \frac{y-s}{a} + \arctg \frac{y+s}{a} \right) \exp[-(y+|u|)^2] dy, \quad (6)$$

где  $s=(x+x')/2$ ,  $u=(x-x')/2$ . Контур поглощения, отвечающий (6), описывается функцией Фойгта  $U(a, x)$ :

$$\sigma(x) = \Sigma U(a, x) = \Sigma \frac{a}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (x-y)^2} dy. \quad (7)$$

Для достижения цели, поставленной в данной работе, необходимо, строго говоря, решить уравнение (1) с функцией перераспределения (6). Но поскольку сделать это аналитически не удастся, мы ограничимся лишь анализом асимптотического поведения решения (1) в интересующих нас областях. Прежде всего, мы будем различать два случая: широкое доплеровское ядро —  $a \ll 1$ , и узкое доплеровское ядро —  $a \gg 1$ . Поскольку практический интерес представляет случай  $a \ll 1$  [5], то ему и будет уделено основное внимание. Для противоположного случая будет дана лишь сводка основных результатов.

При  $a \ll 1$  в контуре поглощения (7) можно выделить две области: доплеровское ядро —

$$\sigma(x) \approx \Sigma \pi^{-3/2} e^{-x^2}, \quad |x| < x_D, \quad (8)$$

и лоренцовские крылья —

$$\sigma(x) \approx \frac{\Sigma a}{\pi x^2}, \quad |x| > x_D. \quad (9)$$

Значение  $x = x_D$ , разделяющее эти области, находится из уравнения

$$x_D^2 \exp(-x_D^2) = a/\sqrt{\pi}. \quad (10)$$

Функция  $x_D(a)$  изменяется очень медленно:  $x_D(0,1) = 2,08$ ,  $x_D(0,01) = 2,67$ .

Стоящую под знаком интеграла в (6) функцию

$$\psi(y, s) = \operatorname{arctg} \frac{y-s}{a} + \operatorname{arctg} \frac{y+s}{a} = \operatorname{Arctg} \frac{2ya}{a^2 + s^2 - y^2} \quad (11)$$

можно при  $a \ll 1$  аппроксимировать выражением

$$\psi(y, s) \approx \begin{cases} 2ya/s^2, & 0 < y < |s|, \\ \pi, & |s| < y \end{cases} \quad (12)$$

Допускаемая при этом в интеграле (6) относительная погрешность порядка  $s^{-2}$  при  $|s| \gg 1$ . В соответствии с (12) функция перераспределения (6) разбивается на два слагаемых:  $R_D(x, x')$  и  $R_s(x, x')$ , где

$$R_D(x, x') = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{\max(|x|, |x'|)}^{\infty} \exp(-y^2) dy, \quad (13)$$

$$R_s(x, x') = \frac{2a}{\pi^{3/2} s^2} \int_0^{|s|} y \exp[-(y+|x|)^2] dy. \quad (14)$$

Функция  $R_D(x, x')$  не зависит от параметра  $a$  и является пределом (6) при  $a \rightarrow 0$ . Ее вклад в (6) намного превосходит вклад  $R_s(x, x')$  при  $|x| \sim |x'| \sim 1$ , становится сравнимым с вкладом  $R_s(x, x')$  при  $|x| \sim |x'| \sim x_D$  и убывает экспоненциально при  $|x| \gg x_D$  или  $|x'| \gg x_D$ . Функция же  $R_s(x, x')$  при  $|x-x'| \sim 1$  и  $|x| \rightarrow \infty$  убывает всего лишь как  $x^{-2}$ . Исходя из этих свойств, мы будем ниже считать, что перераспределение по частоте в пределах доплеровского ядра,  $|x| < x_D$ , осуществляется в соответствии с функцией  $R_D(x, x')$ , а за его пределами,  $|x| > x_D$ , — в соответствии с функ-

цией  $R_a(x, x')$ , для которой, воспользовавшись тем, что  $x_D \gg 2$ , примем приближенное выражение

$$R_a(x, x') \approx \frac{2a}{\pi^{3/2} s^2} \int_0^{\infty} y \exp[-(y+|u|)^2] dy = \frac{a}{\pi^{3/2} s^2} \{e^{-u^2} - \pi^{1/2} |u| [1 - \operatorname{erf}(|u|)]\}. \quad (15)$$

Отметим, что каждая из функций  $R_D(x, x')$  и  $R_a(x, x')$  по отдельности удовлетворяет соотношению симметрии (2).

Поскольку функция перераспределения (6) очень быстро затухает в крыльях, то по прошествии достаточно большого промежутка времени основная роль в перераспределении по частоте может перейти к процессам, нарушающим когерентность резонансного рассеяния в системе покоя рассеивающего иона, для которых характерно более слабое ( $\propto x^{-2}$ ) убывание в крыльях. Такими процессами могут, например, быть столкновения с заряженными частицами, фотоионизация основного состояния и т. п. (подробнее см. [5]), ограничивающие длительность процесса рассеяния временем  $\gamma^{-1}$ . Мы учтем их влияние в пределе  $\gamma \ll \Gamma$ , когда вместо (5) в системе покоя рассеивающего иона необходимо использовать функцию перераспределения [5]

$$R(x, x') = \frac{1}{2\pi^2} \frac{ab}{b^2 + (x-x')^2} \left( \frac{1}{x^2 + a^2} + \frac{1}{x'^2 + a^2} \right), \quad (16)$$

где  $b = \gamma/2\pi \Delta\nu_D \ll a$ . Функция (16) получается как предел при  $\gamma \ll \Gamma$  из закона перераспределения при рассеянии в субординатных линиях [8] и, в отличие от формулы, использованной в работе [9], удовлетворяет условию симметрии (2).

Чтобы получить функцию перераспределения с учетом теплового движения, нужно в (16) перейти в лабораторную систему и усреднить по максвелловскому распределению. Однако при  $b \ll a$  в этом фактически нет необходимости, поскольку при  $|x-x'| \ll 1$  полученный таким образом закон перераспределения будет практически совпадать с  $R(x, x')$  из (6), а в крыльях  $|x-x'| \gg 1$ , где (6) убывает как  $\exp[-(x-x')^2]$ , он будет практически совпадать с (16). Таким образом, для наших целей достаточно рассмотреть перенос излучения с функцией (6), а затем учесть влияние крыльев (16).

### 3. Эволюция профиля линии в однородной бесконечной среде

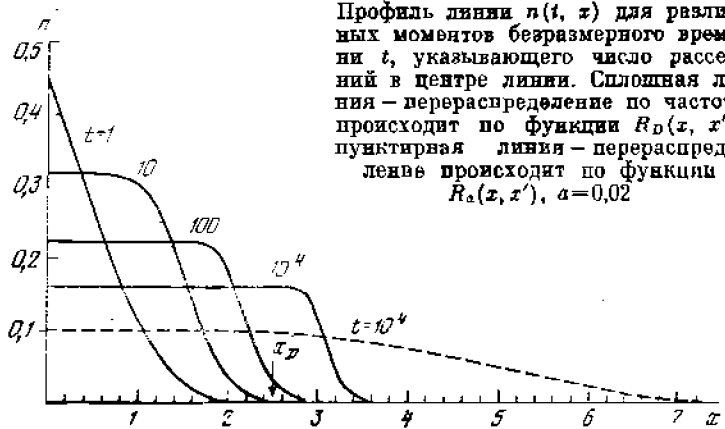
В пределах доплеровского ядра  $|x| < x_D$ , где можно положить  $R(x, x') = R_D(x, x')$ , решение уравнения (1) выписывается в аналитическом виде [10]. При начальном условии  $n(0, x) = \delta(x)$  оно имеет вид

$$n(t, x) = t \int_{|x|}^{\infty} \exp(-\xi^2 - t e^{-\xi^2}) d\xi + e^{-x^2} \delta(x). \quad (17)$$

Здесь  $t$  — безразмерное время, измеряемое в единицах  $\sqrt{\pi}/\Sigma N_D c$  и указывающее число рассеяний в центре линии  $x=0$ . График функции (17) при нескольких значениях  $t$  показан на рисунке сплошной линией. Асимптотическое поведение  $n(t, 0)$  при  $t \gg 1$  имеет вид

$$n(t, 0) = 1/2 (\ln t)^{-1/2}. \quad (18)$$

В лоренцовских крыльях  $|x| > x_D$ , где вкладом  $R_D(x, x')$  можно пренебречь и  $R(x, x') \approx R_a(x, x')$ , уравнение (1) можно решить в диффузи-



онном приближении. Основанием для использования диффузионного приближения служат очень быстрое (ср. (15)) затухание  $R_a(x, x')$  по обеим сторонам от точки  $x=x'$ . Разлагая  $n(t, x')=n(t, x+\xi)$  в ряд по  $\xi$  и используя (15), получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x^2} \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (19)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $n(0, x) = \delta(x)$ , имеет вид

$$n(t, x) = \frac{2^{3/4} \pi^{1/4}}{\Gamma(1/4) (at)^{3/4}} \exp\left(-\frac{\pi^{3/4} x^4}{8 at}\right). \quad (20)$$

График функции (20) при  $a=0,02$  и  $t=10^4$  показан на рисунке пунктирной линией.

Профили линии (17) и (20) обладают специфической формой:  $n(t, x)$  практически постоянно при  $|x| < x_m(t)$  и убывает экспоненциально при  $|x| > x_m(t)$ . Характерная полуширина профиля  $x_m(t)$  определяется выражениями

$$x_m(t) = (\ln t)^{1/4}, \quad t < \pi^{3/4} x_D^2/a, \quad (21a)$$

$$x_m(t) = 2^{-3/4} \pi^{-1/4} \Gamma(1/4) (at)^{1/4} = 1,321 (at)^{1/4}, \quad t > x_D^4/a. \quad (21b)$$

Резюмируя, можно сказать, что при  $t < \pi^{3/4} x_D^2/a$  профиль линии, испущенной в центре контура поглощения  $x=0$  в момент  $t=0$ , расплывается по частоте в соответствии с решением (17), а при  $t > x_D^4/a$  — в соответствии с решением (20).

Отметим, что области применимости асимптотических формул (21a) и (21b) не стыкуются. Это связано с тем, что при расплывании профиля за пределы доплеровского ядра  $|x| > x_D$  переход с асимптотики (18) на асимптотику (20) занимает больше времени, чем достижение точки  $x_m(t) = x_D$ .

Случай узкого доплеровского ядра, когда параметр  $a \gg 1$ , принципиально ничем не отличается от лорензовских крыльев. При  $a \gg 1$  вместо (12) нужно положить

$$\psi(y, s) \approx \frac{2ua}{a^2 + s^2}, \quad (22)$$

после чего уравнение (1) в диффузионном приближении принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{1+x^2/a^2} \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (23)$$

Здесь  $t$  — безразмерное время, нормированное на одно рассеяние в центре линии, т. е. на  $\pi a / \Sigma N_{zc}$ . Решение (23) при  $|x| \gg a$  аналогично (20):

$$n(t, x) = \frac{2^{1/2}}{\Gamma(1/2)} (a^2 t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{8a^2 t}\right). \quad (24)$$

Чтобы учесть расплывание профиля линии под действием крыльев функции (16), поступим следующим образом. Положим, что  $n(t, x) = n(t)$  при  $|x| < x_m$  и  $n(t, x) = 0$  при  $|x| > x_m$ . Основанием для такого приближения могут служить полученные ранее решения (17) и (20). Далее, из уравнения (1) оценим скорость роста  $n(t, x)$  при  $x \gg x_m + 1$ , где становится существенным отличие крыльев функции (16) от крыльев (6). Имеем

$$\frac{\partial n(t, x)}{\partial t} = n(t) \int_{-x_m}^{+x_m} \pi^{1/2} R(x', x) dx' \approx \frac{b}{2\pi^{1/2}} \frac{n(t)}{x^2}. \quad (25)$$

Здесь, как и прежде при  $\sigma \ll 1$ ,  $t$  — безразмерное время, нормированное на  $\pi^{1/2} / \Sigma N_{zc}$ . Отметим, что основной прирост  $n(t, x)$  в (25) происходит за счет рассеяний из области  $|x'| \ll a$ . Закон изменения  $x_m(t)$  оценим из условия сохранения полного числа фотонов

$$\int_{x_m}^{\infty} \frac{\partial n(t, x)}{\partial t} dx = n(t) \frac{dx_m}{dt}, \quad (26)$$

которое дает

$$x_m(t) = \pi^{-1/4} (bt)^{1/4}. \quad (27)$$

Теперь легко выписать приближенный профиль линии, расплывающейся под действием крыльев функции перераспределения (16):

$$n(t, x) \approx \begin{cases} \pi^{1/4} / 4 (bt)^{1/4}, & |x| < x_m \\ \pi^{-1/4} (bt)^{1/4} / 4x^2, & |x| > x_m \end{cases} \quad (28)$$

Отметим, что полученный закон изменения  $n(t, 0)$  практически совпадает с асимптотикой  $n(t, 0)$ , которая получается в рамках предположения о полном перераспределении по частотам. Действительно, решение уравнения (1) с функцией перераспределения

$$R(x, x') = \frac{1}{\pi^2} \frac{b}{x^2 + b^2} \frac{b}{x'^2 + b^2} \quad (29)$$

легко находится методом, изложенным в [11], и имеет вид

$$n(t, x) = \frac{\pi^{-1/4}}{x^2 + b^2} \int_0^t I_0\left(\frac{t'}{2b\pi^{1/4}}\right) \exp\left[-\frac{b(t-t')}{\pi^{1/4}(x^2 + b^2)} - \frac{t'}{2b\pi^{1/4}}\right] dt' + \exp\left(-\frac{t}{b\pi^{1/4}}\right) \delta(x), \quad (30)$$

откуда при  $x=0$ ,  $t \gg 1$  имеем

$$n(t, 0) = \pi^{-1/2} (bt)^{-1/2}. \quad (31)$$

Выше  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя.

Сравнивая (27) и (216), мы видим, что если процесс резонансного рассеяния ограничен в среднем промежутком времени  $\tau^{-1} \gg \Gamma^{-1}$ , то этот эффект становится доминирующим в расширении профиля линии, начиная с момента

$$t^* \approx \frac{\pi^{1/2} \Gamma^2 (1/4)}{2^3} \frac{a}{b^2} = 9,6 \frac{a}{b^2} = 30 \frac{\Gamma \Delta v_D}{\nu^2}. \quad (32)$$

#### 4. Длина термализации

В тех случаях, когда наряду с рассеянием в линии есть процессы, приводящие к гибели фотонов, можно ввести понятие длины термализации  $\tau_{th}$  — среднего расстояния между местом рождения и местом гибели фотона, выраженного в длинах пробега для центра линии. Это понятие существенно облегчает анализ конкретных физических ситуаций. Так, например, если оптическая толщина облака в центре линии  $\tau \ll \tau_{th}$ , то практически все фотоны линии, испущенные в облаке, выходят наружу. В этом случае излучение в линии может явиться мощным механизмом охлаждения плазмы в облаке. Если же  $\tau \gg \tau_{th}$ , то наружу выходят лишь те фотоны, которые родились в тонком поверхностном слое  $0 < \tau \lesssim \tau_{th}$ ; охлаждением в линии во внутренних областях можно пренебречь.

Ниже мы оценим значения  $\tau_{th}$  исходя из решений, полученных для однородной бесконечной среды. При этом мы определим  $\tau_{th}$  как среднее значение оптической толщины  $\bar{\tau}(t_{th})$ , на которое фотон, испущенный в центре линии, отойдет от места рождения к моменту времени  $t_{th}$ , когда вероятность его поглощения возрастет до  $(1 - e^{-1})$ . При этом мы будем различать два случая:

а) наряду с резонансным поглощением  $\sigma(x)$  есть слабое поглощение в континууме, сечение которого  $\sigma_a$  не зависит от частоты,

б) альbedo однократного рассеяния  $\lambda < 1$ , т. е. сечение поглощения  $\sigma_a(x) = (1 - \lambda)\sigma(x)$ .

В случае а) момент времени  $t_{th} = \sigma(0)/\sigma_a = \sigma/\sigma_a$ , в случае б) он определяется из условия  $\bar{\nu}(t_{th}) = (1 - \lambda)^{-1}$ , где  $\bar{\nu}(t)$  — среднее число рассеяний, испытанных фотоном к моменту времени  $t$ . Другими словами, чтобы оценить  $\tau_{th}$ , необходимо найти среднее смещение фотона  $\bar{\tau}(t)$  за время  $t$ , и среднее число испытанных им рассеяний  $\bar{\nu}(t)$ . Отметим, что все приведенные ниже оценки являются асимптотическими и справедливы лишь при  $t \gg 1$ ,  $\sigma_a \gg \sigma_a$ ,  $1 - \lambda \ll 1$ .

Данное выше определение  $\tau_{th}$  по своему физическому смыслу в точности соответствует принятому в [4] для стационарной ситуации и при точном решении одних и тех же задач должно давать значения, отличающиеся от полученных в [4] не более, чем на численный множитель порядка единицы. Это легко проиллюстрировать на хорошо изученном примере монохроматического рассеяния, когда сечение рассеяния  $\sigma$ , вообще не зависит от частоты. В этом случае задача о распространении излучения легко решается в диффузионном приближении:

$$\frac{\partial n(t, \tau)}{\partial t} = \frac{1}{3} \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau^3 \frac{\partial n}{\partial \tau} \right). \quad (33)$$

Длина термализации

$$\tau_{th} = \left( \frac{3}{4\pi t_{th}} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} 4\pi\tau^2 \exp\left(-\frac{3\tau^2}{4t_{th}}\right) d\tau = \left( \frac{16}{3\pi} \frac{\sigma_s}{\sigma_a} \right)^{1/2}, \quad (34)$$

вычисленная согласно данному выше определению, отличается от приведенной в [4] лишь множителем  $(8/\pi)^{1/2} = 1,6$ .

В более сложных случаях, рассмотренных ниже, задачу о распространении излучения в пространстве решить аналитически не удастся. Взамен в данной работе предлагается процедура приближенной оценки  $\bar{\tau}(t)$ , которую мы подробно проиллюстрируем на примере доплеровского ядра фойгтовского контура при  $a \ll 1$ , когда функция перераспределения по частоте  $R(x, x') \approx R_D(x, x')$ .

Сначала оценим, на какое расстояние от места рождения фотон уходит за счет прямых пролетов. Для этого усредним среднее расстояние

$$\bar{\tau}_f(t, x) = \frac{\sigma(x)}{\sigma_s} \int_0^t \tau \exp\left[-\tau \frac{\sigma(x)}{\sigma_s}\right] d\tau / \left\{ 1 - \exp\left[-t \frac{\sigma(x)}{\sigma_s}\right] \right\}, \quad (35)$$

пролетаемое напрямую фотоном с частотой  $x$ , по распределению (17), полученному при решении уравнения (1):

$$\bar{\tau}_f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\tau}_f(t, x) n(t, x) dx = t/2 \ln t. \quad (36)$$

При оценке диффузионного смещения фотона с частотой  $x$  воспользуемся простой формулой

$$\bar{\tau}_d(t, x) = \begin{cases} [t\sigma_s/\sigma(x)]^{1/2}, & t\sigma(x) > \sigma_s, \\ t, & t\sigma(x) < \sigma_s, \end{cases} \quad (37)$$

не содержащей никаких численных множителей. Усредняя (37) по распределению (17), получаем значение

$$\bar{\tau}_d(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\tau}_d(t, x) n(t, x) dx \approx t/\ln t, \quad (38)$$

которое с точностью до множителя  $1/2$  совпадает с (36). Поскольку оба интеграла (36) и (38) набираются при  $|x| \sim (\ln t)^{1/2}$  (где формула (37) уже дает большую погрешность) и в пределах точности нашей оценки совпадают, то это означает, что фотоны расходятся от места рождения в основном за счет прямых пролетов. В предположении о полном перераспределении этот результат был ранее получен в работе [12]. В отличие от  $\bar{\tau}(t)$  среднее число рассеяний  $\bar{\nu}(t)$ , испытываемых фотоном за время  $t$ , можно оценить строго по очевидной формуле

$$\bar{\nu}(t) = \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} n(t', x) \frac{\sigma(x)}{\sigma_s} dx = \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{t}{(\ln t)^{1/2}}. \quad (39)$$

Подставляя необходимые значения  $t_{th}$  в (36), получаем выражения для термализации (46а) и (47а) (см. ниже). Они отличаются от значений, полученных при решении стационарной задачи в рамках гипотезы о полном перераспределении [4], лишь множителем  $\pi^2/8$ . Такого хорошего согласия, конечно, следовало ожидать, если принять во внимание доказан-

ное ранее [11] совпадение асимптотических выражений для  $n(t, x)$ , полученных с точной функцией перераспределения  $R_D(x, x')$  и в предположении о полном перераспределении по доплеровскому контуру. С этой точки зрения такое согласие служит оправданием принятой выше процедуры оценки  $\bar{\tau}(t)$ . Эту процедуру нетрудно также проверить и для случая полного перераспределения с лоренцовским профилем, когда решение уравнения (1) выписывается в виде (30). В этом случае выражения для длин термализации отличаются от приведенных в [4] множителем

$$\frac{18}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2} \frac{e^y - y - 1}{e^y - 1} e^{-y} \int_0^{\sqrt{y}} e^{x^2} dx dy = 1,07.$$

Применяя изложенную выше методику к лоренцовским крыльям фойгтовского контура, где сечение рассеяния имеет вид (9), мы сразу же приходим к выводу, что в этой области частот продвижение фотонов по пространству обусловлено диффузией, а не прямыми пролетами. Действительно, подставляя (9) в (35) и (20) в (36), получаем

$$\bar{\tau}_f(t) = \frac{4\pi^{1/4}}{\Gamma^2(1/4)} \left(\frac{t}{a}\right)^{1/2}, \quad (40)$$

тогда как диффузионное смещение

$$\bar{\tau}_d(t) = \frac{2^{1/2}\pi^{1/4}}{\Gamma(1/4)} \frac{t^{3/4}}{a^{3/4}} = 0,949 \frac{t^{3/4}}{a^{3/4}} \gg \bar{\tau}_f(t). \quad (41)$$

Среднее число рассеяний

$$\bar{\nu}(t) = \frac{2^{1/2}\pi^{1/4}}{3\Gamma(1/4)} \frac{t^{3/4}}{a^{3/4}} = 0,894 \frac{t^{3/4}}{a^{3/4}}. \quad (42)$$

Чтобы улучшить оценку (41) и получить «правильный» численный коэффициент, необходимо найти решение диффузионного уравнения

$$\frac{\partial n(t, x, \tau)}{\partial t} = \frac{a}{2\pi^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x^2} \frac{\partial n}{\partial x} \right) + \frac{\pi^{1/2}}{3} \frac{x^2}{a} \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau^2 \frac{\partial n}{\partial \tau} \right), \quad (43)$$

описывающего одновременную диффузию как по частоте, так и по пространству. Но поскольку аналитически решить (43) не удастся, мы ограничимся лишь следующим соображением в пользу (41). Поскольку согласно (43)

$$n(t, x) = 4\pi \int_0^{\infty} \tau^2 n(t, x, \tau) d\tau$$

удовлетворяет уравнению (19), то к моменту времени  $t$  доля от общего числа фотонов с частотой  $|x| \gg (at)^{1/2}$  экспоненциально мала (см. (20)). С другой стороны, согласно (37) и (9) наибольший вклад в продвижение по пространству дают фотоны с максимальным возможным  $x^2$ , а значит, с  $|x| \sim (at)^{1/2}$ , откуда сразу получается (41). Отметим, что дифференциальный оператор в правой части (43) не допускает стационарных решений в бесконечной среде.

При  $t > t^*$ , когда начинает доминировать эффект ограниченности процесса резонансного рассеяния во времени, продвижение фотонов линии по

пространству за счет свободных пролетов составляет

$$\bar{\tau}_r(t) = t \left( \frac{b}{a} \right)^{1/2} \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{1 - (1+y)e^{-y}}{1 - e^{-y}} \frac{dy}{y^{3/2}} = 0,647t \left( \frac{b}{a} \right)^{1/2}. \quad (44)$$

Оценка диффузионного расплывания дает такое же по порядку величины значение. Среднее число рассеяний

$$\bar{\nu}(t) = 1/2 \pi^{1/2} (t/b)^{1/2}. \quad (45)$$

Объединяя найденные выше результаты для  $\bar{\tau}(t)$  и  $\bar{\nu}(t)$ , получаем, что в случае а) длину термализации нужно оценивать по формулам

$$\tau_{th} = \frac{\sigma_s}{2\sigma_a} \left( \ln \frac{\sigma_s}{\sigma_a} \right)^{-1}, \quad 1 \ll \frac{\sigma_s}{\sigma_a} < \frac{\pi^{1/2}}{a} x_D^2 \quad (46a)$$

$$\tau_{th} = a^{-1/2} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_a} \right)^{1/2}, \quad \frac{x_D^2}{a} < \frac{\sigma_s}{\sigma_a} \ll t^*, \quad (46b)$$

$$\tau_{th} = 0,65 \left( \frac{b}{a} \right)^{1/2} \frac{\sigma_s}{\sigma_a}, \quad t^* < \frac{\sigma_s}{\sigma_a} \quad (46b)$$

(напомним, что  $\sigma_s = \sigma(0) = \Sigma/\pi^{1/2}$  при  $a \ll 1$ ), тогда как в случае б) следует воспользоваться выражениями

$$\tau_{th} = \frac{1}{\pi^{1/2}} \frac{1}{1-\lambda} \left( \ln \frac{1}{1-\lambda} \right)^{-1/2}, \quad 1 \ll \frac{1}{1-\lambda} < \frac{\pi x_D}{2a}, \quad (47a)$$

$$\tau_{th} = \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{x_D^2}{a} < \frac{1}{1-\lambda} \ll \frac{t^{*1/2}}{a^{1/2}}, \quad (47b)$$

$$\tau_{th} = \frac{2,6 b^{1/2}}{\pi^{1/2} a^{1/2}} \frac{1}{(1-\lambda)^2}, \quad \frac{t^{*1/2}}{a^{1/2}} < \frac{1}{1-\lambda}. \quad (47b)$$

Если доплеровским ядром можно пренебречь и  $a \gg 1$ , то вместо (46) и (47) необходимо использовать соответственно

$$\tau_{th} = a^{-1/2} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_a} \right)^{1/2}, \quad a^2 < \frac{\sigma_s}{\sigma_a} \ll \frac{t^*}{a}, \quad (48a)$$

$$\tau_{th} = 0,65 \left( \frac{b}{a} \right)^{1/2} \frac{\sigma_s}{\sigma_a}, \quad \frac{t^*}{a} < \frac{\sigma_s}{\sigma_a} \quad (48b)$$

и

$$\tau_{th} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-\lambda}, \quad a^{1/2} < \frac{1}{1-\lambda} \ll \frac{t^{*1/2}}{a^{1/2}}, \quad (49a)$$

$$\tau_{th} = \frac{2,6}{\pi^{1/2}} \left( \frac{b}{a} \right)^{1/2} \frac{1}{(1-\lambda)^2}, \quad \frac{t^{*1/2}}{a^{1/2}} < \frac{1}{1-\lambda}. \quad (49b)$$

Здесь  $\sigma_s = \sigma(0) = \Sigma/\pi a$ .

Подводя итоги проведенному выше анализу, можно сказать следующее. В условиях, когда критерии применимости гипотезы о полном перераспределении по частоте при резонансном рассеянии нарушаются и необходимо использовать реальную функцию перераспределения ((6) в изотропном случае), можно тем не менее пользоваться результатами, полученными в рамках этой гипотезы, когда существенную роль играет перераспределение лишь в пределах доплеровского ядра  $|x| \ll x_D$ . Если же

профиль линии успевает расшириться за пределы этого ядра,  $|x| > x_D$ , то гипотеза о полном перераспределении становится абсолютно неприменимой. Для порядковых оценок и качественного анализа ситуации в этом случае можно воспользоваться полученными выше выражениями для длины термализации (46)–(49); при более тщательном рассмотрении необходимо решать задачу переноса с соответствующей функцией перераспределения.

Автор выражает признательность Я. Б. Зельдовичу, Д. А. Компанейцу и Р. А. Сюняеву за целый ряд полезных обсуждений.

Институт космических исследований  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
30 мая 1978 г.

#### Литература

- [1] R. McCray. *Comments on Astrophysics*, 7, 13, 1977.
- [2] R. R. Ross, R. Weaver, R. McCray. *Astrophys. J.*, 219, 292, 1978.
- [3] Л. А. Поадняков, И. М. Соболев, Р. А. Сюняев. Препринт ИПМ АН СССР, № 19, 1978.
- [4] В. В. Иванов. Перенос излучения и спектры небесных тел, «Наука», 1969.
- [5] М. М. Баско. Препринт ИКИ АН СССР, № 410, 1978.
- [6] C. van Trigt. *Phys. Rev. A*, 13, 734, 1976.
- [7] В. Г. Левич. *ЖЭТФ*, 10, 1293, 1940.
- [8] R. v. d. R. Woolley, D. W. N. Stibbs. *The Outer Layers of a Star*, Oxford, Clarendon Press, 1953.
- [9] D. G. Hummer. *Monthly Notices of the Roy. Astr. Soc.*, 125, 21, 1962.
- [10] G. B. Field. *Astrophys. J.*, 129, 551, 1959.
- [11] V. V. Ivanov. *Bull. Astr. Inst. Netherlands*, 19, 192, 1967.
- [12] G. B. Rybicki, D. G. Hummer. *Monthly Notices of the Roy. Astr. Soc.*, 144, 313, 1969.

### FREQUENCY REDISTRIBUTION AND THE DIFFUSION OF RADIATION IN RESONANT X-RAY LINES

*M. M. Basko*

The frequency redistribution in resonant lines due to the scattering of ions with a large charge  $Z$  in the residue is analyzed for the case when the hypothesis of complete redistribution is violated. The problem of the evolution of the line profile in an infinite homogeneous medium is considered in detail. It is shown that in the Lorentz wings of the Voigt profile the line expands according to the law  $\Delta\nu \sim t^{1/2}$ . The solutions for an infinite homogeneous medium are employed to estimate the thermalization length  $\tau_{th}$ . The asymptotic formulae for  $\tau_{th}$  are identical to those obtained on the assumption of complete redistribution in the Doppler core of the Voigt contour and significantly differ from those for the Lorentz wings. The thermalization length is also estimated for such values of the parameters for which the main role in the frequency redistribution is played by coherency violation due to the time restriction of the scattering process.