ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Том 13 | 1987 | Вып. 8

УДК 533.932

ДИФФУЗИОННОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННЫМИ ПРОДУКТАМИ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

БАСКО М. М.

1. Введение

Энергия термоядерного синтеза высвобождается в виде быстрых частиц — ядер легких элементов (^{3}H, ^{3}He, ^{4}He и т. п.) и нейтронов, пробеги которых в типичной термоядерной плазме существенно превышают характерные микроскопические масштабы [1]. В соответствии с этим при математическом моделировании процессов, включающих распространение термоядерного пламени, необходимо учитывать, что энергия горения выделяется нелокально. Другими словами, наряду с обычными механизмами передачи энергии за счет электронной теплопроводности и распространения ударных волн необходимо адекватно описывать перенос энергии быстрыми продуктами реакций синтеза [2].

Существуют разные способы описания переноса энергии быстрыми заряженными частицами. Наиболее строгий и прямолинейный метод — численное решение уравнений кинетики для быстрых частиц [3—5]. Этот метод, однако, трудно совместить с динамическими расчетами термоядерных мишеней, поскольку он требует очень больших ресурсов ЭВМ. Авторами [6] предложено использовать приближение вперед-назад, которое позволяет значительно упростить процесс решения исходных уравнений кинетики. Данная работа посвящена наиболее «экономному» из приближенных методов описания переноса энергии заряженными продуктами ядерных реакций — диффузионному. Преимущество диффузионного метода состоит в том, что уравнения гидродинамики с теплопроводностью уже содержат диффузионные члены, и добавление к ним еще нескольких уравнений диффузии не является принципиальным усложнением с точки зрения численных расчетов.

Уравнение диффузии для заряженных продуктов ядерных реакций уже обсуждалось в [7—10]. В [8, 10] на примере статических конфигураций и стационарных волн горения показано, что по точности оно не уступает приближению вперед-назад. По сравнению с [7, 9] данная работа содержит следующие новые элементы: 1) в приближении прямолинейных траекторий получены общие выражения для коэффициентов диффузии D и диссипации G, справедливые для произвольной зависимости силы динамического трения $F(E)$ от энергии быстрых частиц E; 2) исходя из общих выражений для коэффициентов D и G выписаны явные аппроксимационные формулы, позволяющие с точностью ~20% оценить значения последних при любых представляющих практический и теоретический интерес значениях температуры и плотности дейтерий-тритиевой плазмы; 3) выписано правильное обобщение уравнения диффузии для плотности энергии быстрых частиц на случай движущейся плазмы, совместимое с уравнениями гидродинамики; 4) показано, как диффузионное приближение может быть редуцировано к более грубому приближению α-теплопроводности, и приведены формулы для оценки соответствующей добавки к коэффициенту теплопроводности плазмы.

Ниже предполагается, что быстрые частицы-продукты рождаются в реакциях термоядерного синтеза с начальной энергией $E_0={}^1/_2Mv_0^2$ и изотропным распределением начальных скоростей в системе покоя термоядерной плазмы. Плазма для простоты предполагается состоящей из ионов одного сорта. В общем случае температуры электронов T_e и ионов T_i считаются различными.

2. Уравнение диффузии для плотности энергии быстрых частиц

Рассмотрим сначала простейший случай, когда среда (термоядерная плазма) покоится. Пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ — функция распределения быстрых заряженных частиц-продуктов в фазовом пространстве $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ($\mathbf{v}$ — скорость быстрых частиц, M и $E={}^1/_2Mv^2$ — их масса и энергия, $v=|\mathbf{v}|$). В приближении прямолинейных траекторий функция f подчиняется уравнению непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(v_i f)+\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{F_i}{M}f\right)\right]=\frac{q}{4\pi v_0^2}\delta(v-v_0), \qquad (1)$$

где $\mathbf{F}=-(\mathbf{v}/v)F(t, \mathbf{x}, v)$ сила динамического трения, тормозящая быстрые частицы, $q=q(t, \mathbf{x})$ [см$^{-3}\cdot$с$^{-1}$] — скорость рождения быстрых частиц в реакциях термоядерного синтеза (известная функция ионной температуры, плотности и ядерного состава плазмы). Уравнение (1) является по сути уравнением Фоккера – Планка, в котором учтено лишь динамическое трение и отброшен член, описывающий диффузию по скоростям.

Из (1) с помощью стандартных преобразований (см. [8, 9]) можно получить следующее уравнение диффузии:

$$\frac{\partial W}{\partial t}-\operatorname{div}(D\nabla W)+GW=qE_0 \qquad (2)$$

для плотности энергии быстрых частиц

$$W=\int Ef\,d^3\mathbf{v}. \qquad (3)$$

В уравнение (2) входят два кинетических коэффициента — коэффициент диффузии D и коэффициент релаксации G (по порядку величины $D\sim lv_0$, $G\sim v_0/l$, где l — длина свободного пробега быстрых частиц), которые в рамках обычных допущений диффузионного приближения должны быть вычислены исходя из соотношений

$$\int(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F})f\,d^3\mathbf{v}=-GW, \qquad (4)$$

$$\int \mathbf{F}f\,d^3\mathbf{v}=\frac{2}{3}\nabla W=-\frac{2}{3D}\int \mathbf{v}Ef\,d^3\mathbf{v}. \qquad (5)$$

Диффузионное уравнение (2) является хорошим приближением к исходному уравнению переноса (1) в пределе

$$l\ll L=\min\left\{|\nabla\ln q|^{-1},\ |\nabla\ln F|^{-1},\ \ v_0\left|\frac{\partial\ln q}{\partial t}\right|^{-1},\ \ v_0\left|\frac{\partial\ln F}{\partial t}\right|^{-1}\right\} \qquad (6)$$

когда функции $q(t, \mathbf{x})$, $F(t, \mathbf{x})$ слабо меняются на расстояниях $\sim l$ и временах $\sim l/v_0$; в этом же пределе коэффициенты G и D, определенные соотношениями (4), (5), становятся локальными функциями температуры и плотности плазмы.

Уравнение (2) нетрудно обобщить на случай произвольных нерелятивистских движений среды. Прежде всего заметим, что, согласно (5), плотность объемных сил, действующих со стороны быстрых частиц на среду, в диффузионном приближении есть $-{}^2/_3\nabla W$. Последнее означает, что быстрые частицы можно считать газом, давление которого $p={}^2/_3W$. Уравнение энергии для такого газа, движущегося вместе со средой со скоростью $\mathbf{u}=$

$=\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, которое в случае $\mathbf{u}=0$ сводится к (2), имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla W+\frac{5}{3}W\operatorname{div}\mathbf{u}-\operatorname{div}(D\nabla W)+GW=qE_0. \tag{7}$$

Здесь W — объемная плотность энергии быстрых частиц в сопутствующей системе координат, где рассматриваемый элемент среды в данный момент покоится.

Уравнение (7) должно решаться в совокупности с уравнениями динамики среды, которые должны быть совместимы с (7). В простейшем случае одножидкостной однотемпературной гидродинамики без вязкости и теплопроводности эти уравнения сводятся к

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})=0, \tag{8}$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla\left(p+\frac{2}{3}W\right)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\mathbf{u}\cdot\nabla(\rho\varepsilon)+(p+\rho\varepsilon)\operatorname{div}\mathbf{u}=GW. \tag{10}$$

Здесь ρ, p и ε — соответственно плотность массы, давление и массовая плотность внутренней энергии жидкости (плазмы). Совместимость системы уравнений (7)—(10) означает, что в отсутствие источников ($q=0$) ее прямым следствием является закон сохранения полной энергии, объемная плотность которой в лабораторной системе координат дается выражением

$$W_{\text{tot}}=\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)+W. \tag{11}$$

Отметим, что уравнение (26) авторов [9], аналогичное выписанному выше уравнению (7), содержит ошибку (перед членом $\mathbf{u}\cdot\nabla W$ не должно быть множителя $^5/_3$) и несовместимо с уравнениями гидродинамики (8)—(10).

В более общем случае двухтемпературной плазмы, когда уравнение энергии (10) расщепляется на два уравнения для плотности энергии электронов ε_e и ионов ε_i ($\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_i$) [11], аналогичным образом расщепляется и скорость нагрева плазмы:

$$G_eW=\frac{k_e}{k_e+k_i}GW, \qquad G_iW=\frac{k_i}{k_e+k_i}GW. \tag{12}$$

Здесь k_e и k_i — электронная и ионная составляющие полного коэффициента поглощения $k=k_e+k_i$, отвечающие соответственно первому и второму слагаемым в правой части (25) (см. ниже). В интервале 0,1 кэВ$\leqslant T_e\leqslant$300 кэВ, 10^2 г/см$^3\leqslant\rho\leqslant10^3$ г/см^3 отношение k_e/k для дейтерий-тритиевой плазмы может быть с разумной точностью (ошибка $\leqslant$20%) аппроксимировано выражением [12]

$$\frac{k_e}{k_e+k_i}\approx\frac{T_s}{T_s+T_e}. \tag{13}$$

Значения температуры T_s для основных продуктов реакций DD-цикла приведены в таблице.

Если имеется несколько сортов быстрых заряженных частиц, то для плотности энергии W_j каждого сорта j необходимо написать свое уравнение диффузии вида (7) (со своими коэффициентами диффузии D_j, G_j и источником q_jE_{0j}); при этом в (9) и (10) необходимо учесть суммарные вклады от всех сортов: $^2/_3W\to{}^2/_3\sum_j W_j$, $GW\to\sum_j G_jW_j$.

3. Коэффициенты диффузии и диссипации энергии быстрых частиц

Чтобы из (4) вычислить коэффициент диссипации $G=G(\rho, T_e, T_i)$, достаточно воспользоваться стационарным квазиоднородным решением

$$f^{(0)}=\frac{qM}{4\pi v^2F}, \quad 0\leqslant v\leqslant v_0 \tag{14}$$

уравнения (1), справедливым в нулевом порядке по параметру неоднородности l/L. Подставляя (14) в (4), получаем

$$G=av_0k, \tag{15}$$

где безразмерный коэффициент a и коэффициент поглощения k (имеющий размерность обратной длины) определяются соотношениями

$$a=\left[\int\limits_0^{E_0}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{3/2}\frac{F_0}{F}\frac{dE}{E_0}\right]^{-1}, \tag{16a}$$

$$k=\frac{F_0}{E_0}. \tag{16б}$$

Здесь и ниже подразумевается $F=F(\rho, T_e, T_i, E)$, $F_0=F_0(\rho, T_e, T_i)=F(\rho, T_e, T_i, E_0)$.

Для нахождения коэффициента диффузии D необходимо вычислить малую анизотропную добавку $f^{(1)}$ к изотропному решению $f^{(0)}$. В стационарном случае ($\partial/\partial t=0$) в дипольном приближении из (1) имеем

$$f^{(1)}=-\mathbf{v}\cdot\left\{\frac{M^2}{4\pi v^3F}\int\limits_v^{v_0}\nabla\left[\frac{q}{F(v')}\right]v'\,dv'\right\}. \tag{17}$$

Чтобы из (5) и (17) получить локальное выражение для коэффициента D, зависящее от температуры и плотности плазмы, но не от их градиентов, необходимо в дополнение к (6) сделать еще одно упрощающее предположение

$$F(\rho, T_e, T_i, E)=F_0(\rho, T_e, T_i)\,\varphi\left(\frac{E}{E_0}\right), \tag{18}$$

которое справедливо при условии

$$L'=|\nabla\ln(F/F_0)|^{-1}\gg L. \tag{19}$$

На практике условие (19) выполняется с удовлетворительной точностью, поскольку сильные изменения температуры и плотности плазмы довольно слабо отражаются на функциональном виде зависимости $F(E)$. Подставляя (17), (18) в (5), получаем

$$D=b\frac{v_0}{k}, \tag{20}$$

где безразмерный коэффициент b определяется выражением

$$b=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\frac{\nu}{\varphi(\nu)}\left[\int\limits_\nu^1\frac{d\nu'}{\varphi(\nu')}\right]d\nu\Big/\int\limits_0^1\frac{\sqrt{\nu}}{\varphi(\nu)}d\nu. \tag{21}$$

Особого внимания заслуживает частный случай

$$\varphi(\nu)=\nu^n, \tag{22}$$

Частица	E_0, МэВ	c_1	c_2	c_2	T_s, кэВ
^{4}He	3,52	$2{,}2\cdot10^{-3}$	$5{,}7\cdot10^{-4}$	0,077	22
^{3}He	0,82	$2{,}5\cdot10^{-3}$	$6{,}9\cdot10^{-4}$	0,157	5,6
^{3}H	1,01	$2{,}5\cdot10^{-3}$	$5{,}6\cdot10^{-4}$	0,112	7,0
^{1}H	3,02	$2{,}6\cdot10^{-3}$	$5{,}0\cdot10^{-4}$	0,120	67
^{1}H	14,68	$2{,}4\cdot10^{-3}$	$4{,}4\cdot10^{-4}$	0,130	390

для которого из (16а) и (21) получаем

$$a=\frac{3}{2}-n, \tag{23а}$$

$$b=\frac{1}{3+6a}. \tag{23б}$$

Несложный анализ общего выражения (см., например, [13]) для силы торможения быстрых заряженных частиц в плазме показывает, что показатель n изменяется в пределах $-1<n<{}^1/_2$, а безразмерные коэффициенты a и b — в пределах $1<a<{}^5/_2$, ${}^1/_{18}<b<{}^1/_9$. При этом численное значение безразмерной комбинации

$$v_0^{-2}DG=a/(3+6a) \tag{24}$$

изменяется в очень узком интервале — от ${}^1/_9$ до ${}^5/_{36}$. Последний факт можно интерпретировать как еще один довод в пользу того, что упрощающее предположение (18) вносит сравнительно небольшую погрешность в значения коэффициента диффузии ($\leqslant 20\%$), и на практике для вычисления значений D и G достаточно простых формул (15), (16) и (24).

Коэффициент поглощения k в общем случае термоядерной плазмы можно оценить по формуле [14]

$$k=\frac{4\pi e^4Z^2}{E_0v_0^2}\left[\frac{n_e}{m_e}\Phi(x_e)L_{fe}+\frac{n_i}{m_i}z_i^2\sqrt{1+m_i/M}\,L_{fi}\right], \tag{25}$$

учитывающей торможение на свободных электронах и ионах плазмы. Здесь

$$x_e^2=\frac{m_ev_0^2}{2}\left[T_e^2+\left(2^{1/3}\pi\frac{\hbar^2}{m_e}n_e^{2/3}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{26}$$

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_0^x\exp(-t^2)\,dt-x\exp(-x^2)\right]\approx x^3/(x^3+1.33), \tag{27}$$

m_e, $-e$, n_e — масса, заряд и плотность свободных электронов, m_i, $+ez_i$, n_i — масса, заряд и плотность ионов, $+eZ$ — заряд быстрых частиц. Подробные формулы для кулоновских логарифмов L_{fe} и L_{fi} приведены в [14]. Безразмерный коэффициент a для дейтерий-тритиевой плазмы (при произвольном процентном содержании трития) можно с хорошей точностью аппроксимировать выражением

$$a\approx\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left[1+\frac{c_1}{c_2+x_e^3}+c_3x_e^3\right]^{-1}. \tag{28}$$

Сводка значений подгоночных коэффициентов c_1, c_2 и c_3 для пяти сортов заряженных продуктов реакций DD-цикла приведена в таблице. В диапазоне 10^{-2} г/см$^3\leqslant\rho\leqslant10^4$ г/см^3, 0,01 кэВ$\leqslant T_e\leqslant150$ кэВ типичная погрешность формулы (28) $\delta\leqslant10\%$, а максимальная ошибка $\delta_{max}<20\%$.

4. Приближение α-теплопроводности

Если последовательно придерживаться приближения слабых градиентов (6), то можно заметить, что первый и второй члены в уравнении диффузии (2) имеют соответственно порядок малости l/L и $(l/L)^2$ по сравнению с GW. Тогда, решая (2) методом последовательных приближений относительно малого параметра l/L и сохраняя лишь первые неисчезающие члены, содержащие производные по времени и пространству, получаем следующее приближенное выражение для скорости диссипации термоядерной энергии:

$$GW=qE_0+\operatorname{div}\left[D\nabla\left(\frac{qE_0}{G}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{qE_0}{G}\right). \tag{29}$$

Это выражение можно подставить в правую часть гидродинамического уравнения (10). При этом, ограничиваясь минимальным усложнением (10), требуемым для описания нелокального характера выделения термоядерной энергии, обычно сохраняют первые два слагаемых в правой части (29) и пренебрегают последним членом, содержащим производную по времени. Учитывая далее, что пространственное изменение величины qE_0/G в основном обусловлено крутой зависимостью скорости термоядерной реакции q от температуры T_i, и полагая в первом приближении [15]

$$q(T_i)\sim\exp\left[-\left(\frac{E_q}{T_i}\right)^{1/3}\right], \tag{30}$$

преобразуем (29) к виду

$$GW=qE_0+\operatorname{div}(\varkappa_\alpha\nabla T_i) \tag{31}$$

где

$$\varkappa_\alpha=\frac{1}{3}q\frac{D}{G}\frac{E_0}{T_i}\left(\frac{E_q}{T_i}\right)^{1/3}. \tag{32}$$

Подставляя (31) в (10), видим, что нелокальное выделение термоядерной энергии можно приближенно описать в рамках обычной теплопроводности: для этого достаточно в полном выражении для коэффициента теплопроводности учесть аддитивную добавку (32). В случае двухтемпературной плазмы скорость нагрева (31) расщепляется на две компоненты в соответствии с формулой (12).

5. Заключение

Формально диффузионное приближение применимо при условии (6). Однако, как это хорошо известно из теории переноса излучения и нейтронов, его фактическая область применимости гораздо шире. Если отвлечься от ошибок ~10–20% и далеких экспоненциально малых хвостов, то уравнения (2), (7) дают хорошие результаты и в случае как угодно крутых градиентов [8, 10]. Более того, уравнение (7) позволяет описать перенос энергии быстрыми (нерелятивистскими) продуктами ядерных реакций и тогда, когда нельзя использовать приближение Фоккера – Планка (как это имеет место, например, для нейтронов): вопрос при этом упирается лишь в вычисление коэффициентов D и G.

И лишь в тех случаях, когда пробег быстрых частиц l существенно превышает размеры термоядерной плазмы, уравнения (2), (7) заведомо неприменимы. Так, доля энергии $\eta\sim R/l$, оставляемая быстрыми частицами в однородной сфере радиуса $R\ll l$, согласно (2) $\eta\sim(R/l)^2$ (погрешность диффузионного приближения в этом случае превосходит 20% при $R\leqslant 0.15\,l$). Другими словами, если характерный размер области термоядерного горения $2R\geqslant 0.3l$, перенос энергии быстрыми заряженными продуктами вполне адекватно описывается уравнением (7).

В заключение отметим, что, хотя формально приближение α-теплопроводности (31) применимо тогда же, когда и диффузионное, оно все-таки гораздо грубее: его погрешность, в частности, неограниченно растет с ростом градиента ионной температуры.

Автор признателен М. Д. Чуразову за ряд ценных указаний и полезных обсуждений.

Литература

1. *Дюдерштадт Дж., Мозес Г.* Инерциальный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984.
2. *Аврорин Е. Н., Феоктистов Л. П., Шибаршов Л. И.* // Физика плазмы. 1980. Т. 6. С. 965.
3. *Tsuji H., Katsurai M., Sekiguchi T., Nakano N.* // Nucl. Fusion. 1976. V. 16. P. 287.
4. *Кандиев Я. З., Крюченков В. Б., Плохой В. В.* // Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 171.
5. *Иванов М. Ф., Швец В. Ф.* // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. С. 1324.
6. *Гуськов С. Ю., Розанов В. Б.* // Теория нагрева и сжатия низкоэнтропийных термоядерных мишеней. Тр. ФИАН. М.: Наука, 1982. Т. 134. С. 115.
7. *Asano N., Nishihara K., Nozaki K., Taniuti T.* // J. Phys. Soc. Japan. 1976. V. 41. P. 1774.
8. *Баско М. М.* Препринт № 23. М.: ИТЭФ, 1981.
9. *Liberman M. A., Velikovich A. L.* // J. Plasma Phys. 1984. V. 31. Pt. 3. P. 369.
10. *Баско М. М., Будько А. Б.* Препринт № 28. М.: ИТЭФ, 1986.
11. *Брагинский С. И.* // Вопросы теории плазмы/Под ред. Леонтовича М. А. Вып. 1. М.: Госатомиздат. 1963.
12. *Chu M. S.* // Phys. Fluids. 1972. V. 15. P. 413.
13. *Кролл Н., Трайвелпис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. Гл. 6. § 4.
14. *Баско М. М.* // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 1195.
15. *Арцимович Л. А.* Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1960. С. 14.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
19.V.1986
Исправленный вариант
получен 5.IX.1986