

Федеральное агентство по образованию
Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

М.М. Баско

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ИНЕРЦИАЛЬНОГО
ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

Учебное пособие

Москва, 2009

УДК 533.9
ББК Б22.333
Б27

Баско М. М. Физические основы инерциального термоядерного синтеза: Учебное пособие. — М.: МИФИ, 2009, 176 с.

Данное учебное пособие подготовлено на основе курса лекций “Физика термоядерного синтеза”, читаемого на протяжении ряда лет студентам старших курсов Московского инженерно-физического института. Кратко изложена теория физических процессов, лежащих в основе управляемого термоядерного синтеза с инерционным удержанием. Особое внимание уделено теории взаимодействия быстрых продуктов реакций синтеза с термоядерной плазмой, в частности, теории кулоновского торможения быстрых заряженных частиц. Приведены основные сведения из теории взаимодействия теплового излучения с плазмой, необходимые для расчёта термоядерных мишеней. Подробно изложены основные критерии инерциального синтеза и теория термоядерной искры в дейтерий-тритиевом топливе.

Пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов физических вузов по специальностям “Физика плазмы и управляемого термоядерного синтеза”, “Физика электронных и ионных пучков”, “Физика высоких плотностей энергии в веществе”, а также для научных работников, специализирующихся в указанных областях.

Рецензент доктор физ.-мат. наук, профессор В.А. Курнаев.

Рекомендовано редсоветом МИФИ к изданию в качестве учебного пособия.

© Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 2009.

Оглавление

Введение	6
Глава 1 Ядерные реакции синтеза	10
1.1 Энергия ядерных реакций	10
1.2 Сечение ядерных реакций	13
1.3 Скорости термоядерных реакций	16
1.4 Реакции дейтерий-тритиевого цикла	20
1.5 Побочные и перспективные реакции	23
Контрольные вопросы	26
Глава 2 Перенос энергии быстрыми продуктами ядерных реакций	28
2.1 Нейтронный нагрев в оптически тонком пределе	29
2.2 Общие понятия теории кулоновского торможения заряженных частиц	36
2.3 Кулоновское торможение в приближении быстрого пролёта	39
2.4 Строгая теория кулоновского рассеяния	45
2.5 Общие закономерности кулоновского торможения	50
2.6 Формула Бора	55
2.6.1 Модель Бора	55

2.6.2	Вывод нерелятивистской формулы Бора	59
2.6.3	Предел низких скоростей $v \lesssim v_s$	65
2.7	Формулы Бете и Блоха	67
2.8	Кулоновское торможение в плазме	76
2.8.1	Холодная плазма	76
2.8.2	Горячая плазма	82
	Контрольные вопросы	90

Глава 3 Перенос энергии излучением и теплопроводностью 93

3.1	Тепловое излучение в термоядерной плазме	93
3.2	Описание фотонного газа	95
3.3	Обмен энергии между фотонами и электронами при комптоновском рассеянии	100
3.4	Поглощение и излучение фотонов в термоядерной плазме	107
3.5	Средние росселандов и планковский пробеги по тормозному поглощению	114
3.6	Минимальная оценка росселандова пробега	118
3.7	Теплопроводность термоядерной плазмы	120
	Контрольные вопросы	125

Глава 4 Основные критерии и режимы термоядерного горения 127

4.1	Критерий Лоусона	128
4.1.1	Исходная форма критерия Лоусона	128
4.1.2	Критерий Лоусона для стационарного горения с полным поглощением заряженных продуктов	131
4.1.3	Температура зажигания	135
4.2	Критерий инерциального удержания	136

4.2.1	Простая оценка	137
4.2.2	Локальная доля выгорания	138
4.2.3	Доля выгорания при изотермическом раз- лёте сферической массы топлива	140
4.2.4	Параметр выгорания для сферической мас- сы топлива	144
4.2.5	Необходимость сверхвысокого сжатия топлива	146
4.3	Теория термоядерной искры в DT-топливе	147
4.3.1	Основные предположения и критерий зажигания	150
4.3.2	Время инерциального удержания	153
4.3.3	Тепловой баланс в термоядерной искре	155
4.3.4	Граница зажигания в случае бесконечного удержания	157
4.3.5	Граница зажигания в случае конечного удержания	163
	Контрольные вопросы	166
	Список литературы	168

Введение

В основе управляемого термоядерного синтеза (УТС) лежит возможность получения энергии за счёт слияния (синтеза) лёгких атомных ядер в контролируемых условиях, т.е. либо в установках лабораторного типа, либо в промышленных термоядерных реакторах. При этом УТС противопоставляется “неуправляемому” термоядерному синтезу, успешно реализованному в 50-х годах прошлого века в виде термоядерного оружия. Научные исследования по проблеме УТС были начаты практически сразу после успешных испытаний первых термоядерных бомб. Основным стимулом для таких исследований является перспектива получить доступ к огромным запасам ядерной энергии, содержащимся в таких компонентах потенциального термоядерного топлива как дейтерий, тритий, литий, бор и другие. В данное время эти исследования успешно продвигаются к важному промежуточному финишу, а именно, к убедительной демонстрации возможности практического осуществления УТС в исследовательских установках ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor, France), NIF (National Ignition Facility, USA) и LMJ (Laser Mégajoule, France).

Управляемый термоядерный синтез содержит в себе два основных направления, отличающихся способом удержания горячей термоядерной (ТЯ) плазмы. В случае магнитного ТЯ синтеза (МТС) разогретая плазма ТЯ топлива удерживается квазистатическим образом с помощью сильного магнитного поля в течение

десятков минут и часов в установках типа токамак, стелларатор и им подобных. При этом ТЯ реактор работает фактически в стационарном режиме: в него непрерывно впрыскивается новое топливо, из него непрерывно выводятся продукты ТЯ горения, а выделяющаяся энергия непрерывно снимается со стенок реактора. Практическая реализуемость МТС должна быть впервые продемонстрирована на международном токамаке ITER (предположительно в районе 2016 года), строительство которого начато в 2008 г. на юге Франции.

В отличие от МТС, в инерциальном ТЯ синтезе (ИТС) плазма ничем не удерживается кроме собственной инерции: все реакции ядерного синтеза происходят в короткий промежуток времени, измеряемый долями наносекунды ($1 \text{ нс} = 10^{-9} \text{ с}$), в процессе свободного разлёта определённой массы ТЯ топлива. Столь короткое время инерционного “удержания” объясняется огромным давлением, которое развивается в процессе ТЯ горения и расталкивает горящее топливо. Тем самым, в ИТС мы по сути имеем дело с ТЯ взрывом (или последовательностью таких взрывов). В этом случае управляемость ТЯ синтеза означает лишь достаточно малую мощность (точнее, энергию) каждого такого взрыва, не приводящую к разрушению взрывной камеры разумных размеров. Далее, в отличие от “неуправляемых” взрывов ТЯ бомб, “управляемые” ТЯ взрывы малой мощности будем называть микровзрывами. Общепринятая верхняя граница энерговыделения в одном ТЯ микровзрыве находится в районе 1 ГДж (10^9 Дж).

На первый взгляд может показаться, что между ИТС и ТЯ оружием нет никакой принципиальной разницы: необходимо лишь на несколько порядков понизить мощность взрыва. Однако инициирование самоподдерживающейся ТЯ реакции (ТЯ горения) требует создания столь высокой начальной концентрации энергии, что достижение этого в контролируемых лабораторных условиях наталкивается на огромные трудности, преодоление которых связано с необходимостью решения целого ряда новых научных проблем и проведения большого объёма дорогостоящих

исследований.

Прежде всего, для инициирования ТЯ микровзрывов ИТС следует отказаться от использования в качестве “запала” атомной бомбы деления. А тогда сразу возникает принципиальный вопрос: каким должно быть устройство (или способ), которое обеспечит требуемую начальную концентрацию энергии? В исследованиях по ИТС это устройство принято называть *драйвером*. Многочисленные попытки использовать в качестве драйвера обычную (химическую) взрывчатку не увенчались успехом. В настоящее время на роль реалистичных драйверов для ИТС претендуют мощные лазеры, ускорители тяжелых ионов и системы на основе мощного электрического разряда типа Z-пинч. Ближе всего к успешной демонстрации ИТС подошли исследования по лазерному ТЯ синтезу (ЛТС). Первые ТЯ микровзрывы с энерговыделением 10–20 МДж, инициированные лазерным импульсом, планируется осуществить в районе 2011 г. на установке NIF в Ливерморской лаборатории США.

Данное пособие основано на курсе лекций, читаемом на протяжении ряда лет студентам старших курсов МИФИ и МФТИ. В нём прежде всего рассматривается теория физических процессов, лежащих в основе ИТС, а точнее, физика мишеней ИТС. У мишеней, используемых с различными вариантами драйвера, много общего. Основное внимание уделено тем физическим процессам, которые не зависят от типа используемого драйвера. Для начального ознакомления с физикой ИТС можно порекомендовать монографии [1, 2, 3]. Более детальная информация о современном состоянии исследований по ИТС содержится в монографии [4] и последнем обзоре [5] Дж. Линдла. Обсуждение энергетических аспектов ИТС, а также описание возможных типов драйвера и схем энергетического реактора на основе ИТС можно найти в недавно вышедшей книге [6].

В качестве основной системы единиц ниже повсюду используется система CGS (сантиметр, грамм, секунда), и все физические формулы (кроме специально оговоренных случаев) приведены

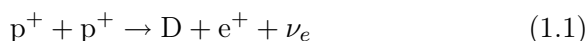
именно в этой системе. Во многих случаях, однако, когда это является особенно удобным или общепринятым, численные значения различных величин приведены в таких внесистемных единицах как килоэлектронвольт (кэВ), мегаэлектронвольт (МэВ), наносекунда (нс), мегаджоуль (МДж), тераватт (ТВт), и тому подобных. Для температуры T везде используются энергетические единицы, т.е. 1 эрг, если не оговорено противное. Чтобы перейти к температуре в градусах Кельвина, необходимо в соответствующих формулах заменить T на $k_B T$, где k_B — постоянная Больцмана.

Глава 1

Ядерные реакции синтеза

1.1 Энергия ядерных реакций

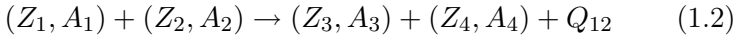
Подобно тому, как источником энергии обычного химического горючего является энергия связи электронов в атомах и молекулах, источником энергии ядерного горючего является энергия связи нуклонов в атомных ядрах. Мы ограничимся ядерными реакциями, в которых по отдельности сохраняются как начальное число протонов, так и начальное число нейтронов. Реакции со взаимными превращениями протонов в нейтроны (и наоборот) типа



включают слабое взаимодействие и протекают слишком медленно, чтобы представлять хоть какой-то интерес для УТС. Тем самым, в рассматриваемых нами реакциях автоматически обеспечивается сохранение электрического заряда и исключается рождение (или уничтожение) электронов и позитронов. Как следствие, в энергетическом балансе реакции не требуется учитывать массу атомных электронов, а их энергию связи можно считать пренебрежимо малой.

Основной интерес для УТС представляют *бинарные реакции*, в которых в каждый отдельный акт ядерного взаимодействия

вступают только два ядра (Z_1, A_1) и (Z_2, A_2) , содержащие по Z_k протонов и A_k нуклонов ($k = 1, 2$). Продуктами бинарной реакции могут быть одна, две или более ядерных частиц. Относительно более медленные реакции, в которых рождаются фотоны, и скорость которых ограничена электромагнитным взаимодействием, также не интересны для производства энергии в УТС. В результате нам остаются реакции, в которых происходит простая перегруппировка нуклонов в энергетически более выгодную конфигурацию с высвобождением избыточной энергии связи. Такие реакции протекают под действием только сильного взаимодействия. В качестве типичного примера рассмотрим реакцию



с двумя частицами-продуктами (Z_3, A_3) и (Z_4, A_4) и энергией (теплотой) реакции Q_{12} . Нас, естественно, интересуют экзотермические реакции, для которых $Q_{12} > 0$. Поскольку никаких других частиц кроме (Z_3, A_3) и (Z_4, A_4) в процессе (1.2) не рождается, энергия Q_{12} выделяется в виде кинетической энергии разлёта этих двух частиц-продуктов.

Энергию реакции Q_{12} легко вычислить, если известны энергии связи $E_{Bk} = \epsilon_{Bk} A_k$ всех участвующих ядер ($k = 1, 2, \dots$):

$$Q_{12} = E_{B3} + E_{B4} - E_{B1} - E_{B2} = (A_1 + A_2)(\bar{\epsilon}_{Bout} - \bar{\epsilon}_{Bin}). \quad (1.3)$$

Здесь использовано понятие средней удельной энергии связи на один нуклон до взаимодействия,

$$\bar{\epsilon}_{Bin} = \frac{\epsilon_{B1} A_1 + \epsilon_{B2} A_2}{A_1 + A_2}, \quad (1.4)$$

и, соответственно, после взаимодействия,

$$\bar{\epsilon}_{Bout} = \frac{\epsilon_{B3} A_3 + \epsilon_{B4} A_4}{A_3 + A_4}, \quad (1.5)$$

а также условия $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$ и $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$.

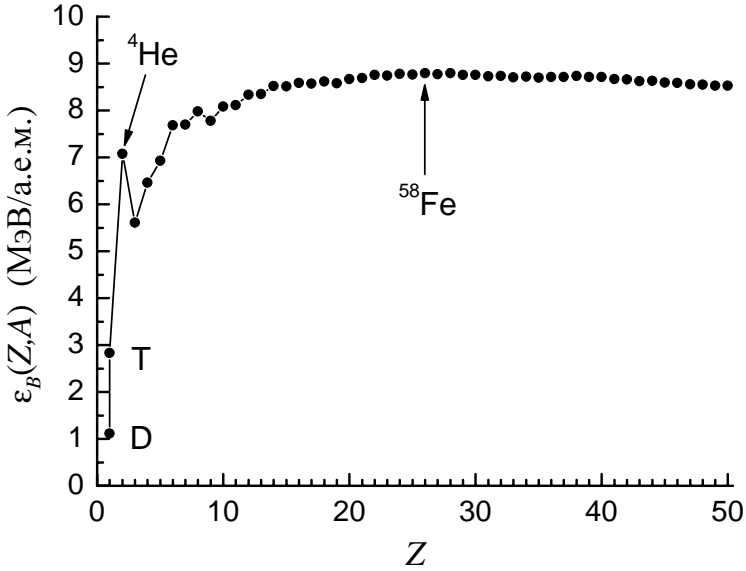


Рис. 1.1. Удельная энергия связи ядер $\epsilon_B(Z, A)$ в зависимости от порядкового номера элемента Z . Для простоты при каждом значении Z выбран изотоп A с наибольшим значением $\epsilon_B(Z, A)$

Формула (1.3) выражает тот довольно очевидный факт, что энергетически выгодными являются реакции, сопровождающиеся такой перегруппировкой нуклонов, при которой возрастает средняя удельная энергия связи ядер. Энергии связи E_B практически всех существующих в природе изотопов хорошо известны [7, 8]. На рис. 1.1 показана зависимость удельной энергии связи $\epsilon_B = \epsilon_B(Z, A)$ от порядкового номера элемента Z для наиболее глубоко связанных изотопов. Видно, что с увеличением Z удельная энергия связи ядер в среднем растёт вплоть до “железного” пика при $Z = 26$. Последнее означает, что для производства энергии пригодны реакции синтеза лишь лёгких и средних элементов до тех пор, пока в качестве ядерной “золы” не начнут получаться элементы группы железа. Этот факт, в частности, играет важ-

ную роль в теории эволюции звёзд. Ядерную энергию тяжёлых элементов, обусловленную их более низкой (по отношению к железному пику) удельной энергией связи, можно, как известно, высвободить в реакциях деления.

Рис. 1.1 ясно показывает, что самой высокой удельной теплотворной способностью должно обладать ТЯ топливо, состоящее из самых лёгких элементов: водорода ${}^1\text{H}$ и его изотопов дейтерия $\text{D} = {}^2\text{H}$ и трития $\text{T} = {}^3\text{H}$. Ядерная энергия, выделяющаяся в DT-реакции



составляет $Q_{DT} = 17.59$ МэВ, что соответствует теплотворной способности DT-топлива 337 МДж/мг. Для сравнения укажем, что теплотворная способность гремучего газа (стехиометрической смеси водорода и кислорода) составляет 15.8 Дж/мг. Так называемый *тротиловый эквивалент*, характеризующий энерговыделение в обычной (химической) взрывчатке, равен (по определению) 4.184 Дж/мг. Таким образом, удельное энергосодержание ТЯ топлива почти в 10^8 раз превышает энергосодержание химического топлива, если в последнее включить массу окислителя.

1.2 Сечение ядерных реакций

Основной физической величиной, характеризующей скорость протекания ядерных реакций (как и большинства других элементарных процессов), является их *эффективное сечение* (или просто *сечение*). Определение сечения σ_{12} бинарной реакции типа (1.2) проще всего сформулировать в системе отсчёта, где одна из реагирующих частиц (для определённости пусть это будет частица сорта 2) покоится. Предположим, что в этой системе имеется одна покоящаяся частица сорта 2, на которую налетает поток частиц сорта 1 с объёмной плотностью n_1 [см $^{-3}$] и скоростью v . Тогда вероятность того, что за время dt произойдёт событие (1.2), даётся выражением $d\nu = n_1 v \sigma_{12} dt$. Определённое

таким образом сечение σ_{12} имеет, очевидно, размерность площади и является релятивистски инвариантным [9, §12].

В общем случае величина сечения σ_{12} может зависеть от внутренних характеристик реагирующих частиц (таких, как электрический заряд, спин и т.п.), от типа взаимодействия между ними и от скорости v их относительного сближения. Как известно, сильное взаимодействие, приводящее к перегруппировке нуклонов в реакциях типа (1.2), проявляется лишь на коротких расстояниях $r \lesssim r_n$ порядка радиуса нуклона r_n и очень быстро спадает при $r \gg r_n$. Одним из следствий этого обстоятельства является так называемый эффект насыщения ядерных сил, благодаря которому радиус R_A ядра, состоящего из A нуклонов, в первом приближении оказывается пропорционален $A^{1/3}$. Если определить эффективный радиус нуклона r_n соотношением

$$R_A = r_n A^{1/3}, \quad (1.7)$$

то в зависимости от типа проводимых измерений экспериментальные данные дают значения $r_n = (1.1-1.4) \times 10^{-13}$ см [10, с. 923].

Короткодействующий характер ядерных сил приводит к тому, что реакция (1.2) может осуществиться лишь тогда, когда ядра (Z_1, A_2) и (Z_2, A_2) сближаются фактически до “касания”, т.е. до расстояния $R_{12} = r_n (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$. Этому, однако, препятствует кулоновское отталкивание положительно заряженных ядер — если, конечно, оно не экранировано другими частицами с отрицательным зарядом (электронами в обычном веществе, μ^- -мезонами в мезоатомах и т.п.). В рассматриваемой ниже ТЯ плазме электроны находятся в среднем на сравнительно больших расстояниях $\gtrsim 10^{-9}$ см от ядер, и этой экранировкой можно пренебречь. Потенциальную энергию электростатического взаимодействия ядер на радиусе касания

$$E_{cb} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_n (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \quad (1.8)$$

принято называть кулоновским барьером; здесь e — положительный элементарный заряд. При оценке E_{cb} для простоты предполагается, что весь электрический заряд ядра сосредоточен в центре. Для реакции (1.6) кулоновский барьер составляет $E_{cb} \approx 0.4$ МэВ.

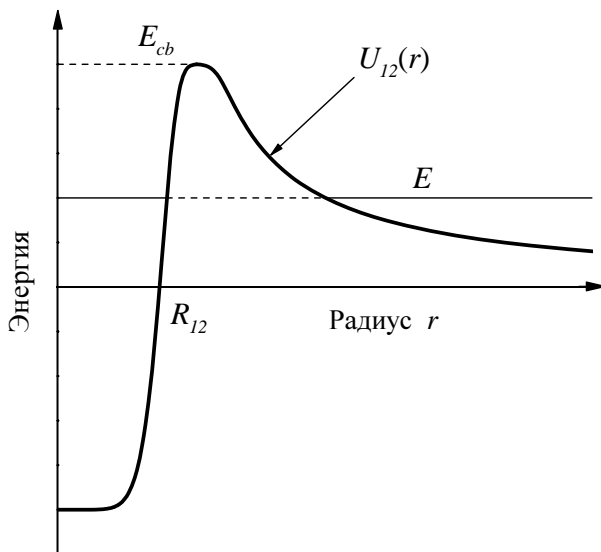


Рис. 1.2. Качественный вид потенциала взаимодействия двух атомных ядер

С учетом кулоновского барьера эффективный потенциал взаимодействия $U_{12}(r)$ ядер в реакции (1.2) имеет качественный вид, изображенный на рис. 1.2. В рамках классической физики для преодоления кулоновского барьера требуется, чтобы суммарная кинетическая энергия ядер в системе центра инерции (*u-системе*)

$$E = \frac{1}{2} M v^2, \quad M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad (1.9)$$

превосходила E_{cb} . Здесь M_1 и M_2 — массы сталкивающихся ядер,

M — их приведённая масса, $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ — скорость их относительного сближения до вступления в реакцию на большом удалении друг от друга; в интересующих нас условиях скорость $v = |\vec{v}|$ можно считать малой по сравнению со скоростью света c .

В квантовой теории возможно подбарьерное (туннельное) проникновение в область сильного ядерного притяжения $r < R_{12}$ и при $E < E_{cb}$, но с экспоненциальной малой вероятностью, если $E \ll E_{cb}$. Поскольку нас интересует возможность осуществления ядерных реакций при наиболее низких энергиях E , можно воспользоваться общей квантовой асимптотикой для сечений неупругого рассеяния в пределе низких скоростей [11, §143] и представить зависимость $\sigma_{12}(v)$ в виде

$$\sigma_{12}(v) = \frac{S_{12}}{v^2} \exp\left(-2\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right). \quad (1.10)$$

Экспоненциальный множитель в (1.10) как раз и характеризует вероятность квантового проникновения под кулоновский барьер. Этот множитель часто называют фактором Гамова и представляют в виде $\exp\left(-\sqrt{E_G/E}\right)$, где

$$E_G = 2\pi^2 \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4 M}{\hbar^2} = 979.13 Z_1^2 Z_2^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \text{ кэВ}. \quad (1.11)$$

В формуле (1.11) $A_1 = M_1/m_u$, $A_2 = M_2/m_u$ — атомные массы реагирующих ядер, $m_u = 1.66054 \times 10^{-24}$ г — атомная единица массы. Для нерезонансных ядерных реакций можно в первом приближении считать, что S_{12} есть некоторая постоянная, характеризующая данную конкретную реакцию, и зависимость сечения от относительной скорости ядер v полностью описывается выражением (1.10).

1.3 Скорости термоядерных реакций

Когда употребляется термин “термоядерный синтез”, то имеется в виду, что реакции ядерного синтеза протекают в условиях

теплового равновесия (по крайней мере для ядерной компоненты ТЯ горючего), при котором вступающие в реакцию ядра имеют равновесное максвелловское распределение по скоростям. В этом случае для вычисления скорости реакции (1.2) необходимо прежде всего провести усреднение её сечения (1.10) по максвелловскому распределению.

Рассмотрим гомогенную смесь двух сортов ядер (Z_1, A_1) и (Z_2, A_2) с общей температурой T и объёмными концентрациями n_1 и n_2 [см⁻³] соответственно и введём для каждого из этих сортов максвелловскую функцию распределения

$$f_k(\vec{v}_k, T) = \left(\frac{M_k}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{M_k v_k^2}{2T} \right), \quad k = 1, 2, \quad (1.12)$$

нормированную условием

$$\int f_k(\vec{v}_k, T) d^3\vec{v}_k = 1. \quad (1.13)$$

Если на мгновение предположить, что все ядра сорта 1 имеют скорость \vec{v}_1 , а все ядра сорта 2 — скорость \vec{v}_2 (моноэнергетические пучки), то по определению эффективного сечения σ_{12} число бинарных реакций (1.2) в единице объёма в единицу времени составит

$$\frac{dN_{12}}{dV dt} = n_1 n_2 v \sigma_{12}(v) \quad [\text{см}^{-3} \text{ с}^{-1}], \quad (1.14)$$

где $v = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ — относительная скорость. Отметим, что применимость выражения (1.14) ограничена нерелятивистскими скоростями $|\vec{v}_1| \ll c$, $|\vec{v}_2| \ll c$ [9, §12]. В случае максвелловского распределения, когда доля ядер сорта k , имеющих скорость \vec{v}_k , составляет $f_k(\vec{v}_k, T) d^3\vec{v}_k$, число реакций в единице объёма в единицу времени даётся выражением

$$\frac{dN_{12}}{dV dt} = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle_{12}, \quad (1.15)$$

где величина $\langle \sigma v \rangle_{12}$ определяется интегралом по скоростям

$$\langle \sigma v \rangle_{12} = \int_{\vec{v}_1} \int_{\vec{v}_2} v \sigma_{12}(v) f_1(\vec{v}_1, T) f_2(\vec{v}_2, T) d^3\vec{v}_1 d^3\vec{v}_2. \quad (1.16)$$

В дальнейшем под *скоростью термоядерной реакции* будем понимать именно величину $\langle \sigma v \rangle$, которая имеет размерность $[\text{см}^3 \text{с}^{-1}]$ и для каждой конкретной реакции является функцией одной лишь температуры T .

Случай однокомпонентного ТЯ топлива, состоящего из ядер одного сорта (Z_1, A_1) , которые могут вступать в реакцию синтеза друг с другом, следует отметить особо. В этом случае число реакций в единице объёма в единицу времени будет определяться выражением

$$\frac{dN_{11}}{dV dt} = \frac{1}{2} n_1^2 \langle \sigma v \rangle_{11}, \quad (1.17)$$

где для $\langle \sigma v \rangle_{11}$ справедливо то же определение (1.16) с заменой индекса 2 на 1. Дополнительный множитель $\frac{1}{2}$ в (1.17) по сравнению с (1.15) возникает из-за того, что теперь в каждой реакции (1.2) участвуют две частицы сорта 1, и при суммировании вероятности реакции по всем ядрам-мишеням $n_1 dV$ в элементе объёма dV мы каждый акт реакции учтём дважды.

Стоящий в правой части (1.16) 6-кратный интеграл по переменным \vec{v}_1, \vec{v}_2 можно существенно упростить, если в 6-мерном пространстве (\vec{v}_1, \vec{v}_2) сделать формальную замену переменных

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_c + \frac{M_2}{M_1 + M_2} \vec{v}, \quad (1.18a)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_c - \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}, \quad (1.18b)$$

и перейти к интегрированию по переменным \vec{v} и \vec{v}_c . Здесь, как и ранее, $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ — относительная скорость, а

$$\vec{v}_c = \frac{M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2}{M_1 + M_2} \quad (1.19)$$

скорость центра инерции реагирующих ядер 1 и 2. Заметив, что в новых переменных

$$f_1(\vec{v}_1, T) f_2(\vec{v}_2, T) = \frac{(M_1 M_2)^{3/2}}{(2\pi T)^3} \exp \left(-\frac{M_1 + M_2}{2T} v_c^2 - \frac{M}{2T} v^2 \right), \quad (1.20)$$

без труда выполняем интегрирование по всему трёхмерному пространству скоростей \vec{v}_c и по двум угловым переменным в сферических координатах в трёхмерном пространстве относительных скоростей \vec{v} . В результате получаем следующее выражение для $\langle \sigma v \rangle_{12}$, содержащее лишь один интеграл по модулю относительной скорости v :

$$\langle \sigma v \rangle_{12} = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \sigma_{12}(v) \exp\left(-\frac{M}{2T}v^2\right) v^3 dv. \quad (1.21)$$

Характер зависимости скорости нерезонансных реакций $\langle \sigma v \rangle_{12}$ от температуры T можно установить, подставив выражение (1.10) в формулу (1.21), в результате чего получаем

$$\langle \sigma v \rangle_{12} = 2S_{12} \left(\frac{M}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \exp\left(-x - \sqrt{\frac{E_G}{xT}}\right) dx. \quad (1.22)$$

Интеграл в правой части этого выражения вычисляется приближённо так называемым методом перевала. Поскольку показатель экспоненты в подынтегральной функции (1.21) имеет максимум при

$$x = x_0 = \left(\frac{E_G}{4T} \right)^{1/3}, \quad (1.23)$$

то можно предположить, что основной вклад в интеграл даёт малая окрестность этой точки. Разлагая показатель экспоненты в ряд Тэйлора в окрестности $x = x_0$ до второго члена, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp\left(-x - \sqrt{\frac{E_G}{xT}}\right) dx &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-3x_0 - \frac{3}{4x_0}(x - x_0)^2\right] dx \\ &= \left(\frac{4\pi x_0}{3} \right)^{1/2} \exp(-3x_0). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Легко понять, что метод перевала становится асимптотически точным в пределе $x_0 \gg 1$ (т.е. при $T \ll E_G$), поскольку при

этом эффективная ширина максимума в показателе экспоненты $\Delta x \simeq x_0^{1/2} \ll x_0$. Из (1.22)–(1.24) получаем выражение

$$\langle \sigma v \rangle_{12} \approx \frac{\tilde{S}_{12}}{T^{2/3}} \exp \left[-3 \left(\frac{E_G}{4T} \right)^{1/3} \right], \quad (1.25)$$

где \tilde{S}_{12} — некоторая постоянная, характеризующая данную конкретную реакцию.

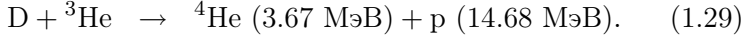
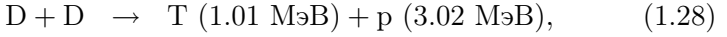
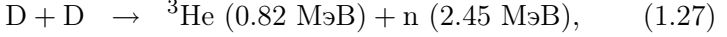
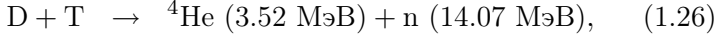
Формула (1.25) с разумной точностью описывает температурную зависимость скоростей $\langle \sigma v \rangle$ большинства ТЯ реакций синтеза и часто является отправной точкой для построения более точных аппроксимационных формул. Она ясно показывает, что при не слишком высокой температуре T скорость реакции, в первую очередь, определяется значением гамовской энергии E_G . В астрофизических обзорах [12] достаточно точные аппроксимации для скоростей $\langle \sigma v \rangle$ большого числа ТЯ реакций получены простой заменой множителя \tilde{S}_{12} в (1.25) на аппроксимационный полином пятой степени относительно величины $T^{1/3}$.

1.4 Реакции дейтерий-тритиевого цикла

Главным обстоятельством, определяющим выбор ТЯ топлива, является скорость соответствующей ТЯ реакции. Максимальную скорость ТЯ горения следует, очевидно, ожидать от различных вариантов смеси изотопов водорода — дейтерия D и трития T, поскольку для них минимально значение гамовской энергии E_G . Различают два основных типа водородного топлива: (1) эквимолярную (с равной концентрацией ядер D и T) смесь дейтерия и трития, называемую для простоты *DT-топливом*, и (2) чистый дейтерий, который называют *DD-топливом*. Возможны, конечно, и промежуточные варианты с произвольным относительным содержанием трития.

В дейтерий-тритиевой смеси может протекать целый ряд различных ядерных реакций. Основной интерес, с точки зрения вы-

деления энергии при ТЯ горении, представляют следующие четыре из них:



Скорости этих реакций с неплохой точностью описываются простыми выражениями:

$$\langle \sigma v \rangle_{DT} \approx 2.62 \times 10^{-12} T_{keV}^{-2/3} \exp\left(-\frac{19.98}{T_{keV}^{1/3}}\right) \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}, \quad (1.30)$$

$$\langle \sigma v \rangle_{DDn} \approx 1.29 \times 10^{-14} T_{keV}^{-2/3} \exp\left(-\frac{18.81}{T_{keV}^{1/3}}\right) \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}, \quad (1.31)$$

$$\langle \sigma v \rangle_{DDp} \approx 1.35 \times 10^{-14} T_{keV}^{-2/3} \exp\left(-\frac{18.81}{T_{keV}^{1/3}}\right) \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}, \quad (1.32)$$

$$\langle \sigma v \rangle_{DHe3} \approx 2.16 \times 10^{-12} T_{keV}^{-2/3} \exp\left(-\frac{31.72}{T_{keV}^{1/3}}\right) \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}, \quad (1.33)$$

основанными на формуле (1.25). Более точные аппроксимации для скоростей указанных реакций можно найти в работах [12, 13]. Графики температурной зависимости $\langle \sigma v \rangle$ для реакций (1.26)–(1.29) в диапазоне $T = 1\text{--}100$ кэВ приведены на рис. 1.3. Два канала реакции D+D имеют практически равную вероятность; на рис. 1.3 показана сумма $\langle \sigma v \rangle_{DDn} + \langle \sigma v \rangle_{DDp}$ по обоим каналам.

На рис. 1.3 хорошо видно, что из четырёх реакций (1.26)–(1.29) самой быстрой является реакция D+T: в диапазоне температур 1–30 кэВ её скорость приблизительно в 100 раз превышает скорость D+D реакции. Последнее означает, что в DT-топливе достаточно учесть лишь одну реакцию (1.26); энергетическая роль процессов (1.27)–(1.29) сводится к поправкам на

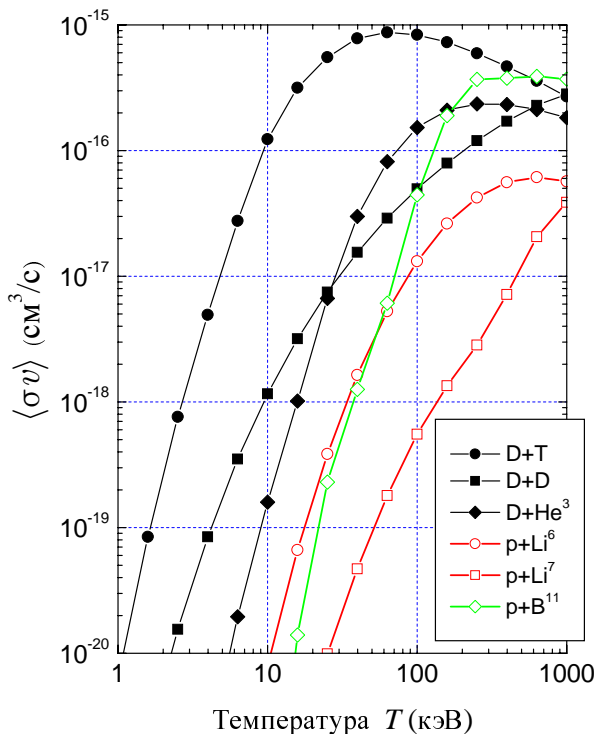


Рис. 1.3. Температурная зависимость скоростей основных реакций, представляющих наибольший интерес для УТС

уровне нескольких процентов. В DD-топливе необходимо, конечно, учитывать все четыре реакции (1.26)–(1.29). Суммируя энергии всех продуктов в правых частях (1.26)–(1.29), мы видим, что в предположении полного выгорания промежуточных продуктов T и ^3He теплотворная способность DD-топлива составляет 43.24 МэВ на 6 ядер дейтерия, т.е. 345 МДж/мг — что практически не отличается от теплотворной способности DT-топлива, равной 337 МДж/мг.

По поводу основных реакций в DD-топливе следует сделать

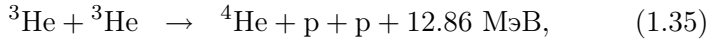
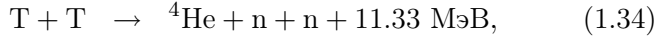
следующее замечание. На первый взгляд может показаться, что поскольку образующиеся в актах $D+D$ синтеза ядра T и ${}^3\text{He}$ обладают довольно высокой кинетической энергией ~ 1 МэВ, достаточной для преодоления кулоновского барьера, то они должны реагировать с ядрами дейтерия почти сразу “на лету”, т.е. ещё до того, как они придут в тепловое равновесие с окружающей средой. А тогда скорость этих вторичных реакций следовало бы рассчитывать не по “тепловым” формулам (1.26), (1.29), а используя значение σv при конкретной скорости v , соответствующей начальной энергии образования ядра T или ${}^3\text{He}$. Однако дело в том, что в типичных условиях ТЯ горения сечение кулоновского торможения быстрых ядер T и ${}^3\text{He}$ существенно превышает соответствующие ядерные сечения (подробнее см. следующую главу), и термализация подавляющей части из них происходит гораздо раньше, чем они успевают прореагировать с ядрами дейтерия “на лету”. Но определённая малая доля быстрых ядер T или ${}^3\text{He}$ успевает, конечно же, вступить в реакцию до полной термализации.

На рис. 1.3 видно также, что при $T < 26$ кэВ реакция $D+{}^3\text{He}$ идёт медленнее, чем $D+D$ (из-за более высокого кулоновского барьера), но обгоняет её при более высоких температурах. Если к этому добавить то важное обстоятельство, что в реакции $D+{}^3\text{He}$ не образуется нейтронов, то становится понятным особый интерес к $D+{}^3\text{He}$ -топливу, содержащему атомы дейтерия и гелия-3 в равной пропорции. Ясно, однако, что и в этом варианте ТЯ топлива важную роль будут играть все четыре реакции (1.26)–(1.29).

1.5 Побочные и перспективные реакции

В каждом виде ТЯ топлива наряду с основными ТЯ реакциями всегда протекает и целый ряд побочных. Так, например, в

DT- и D³He-топливе будут иметь место ТЯ реакции



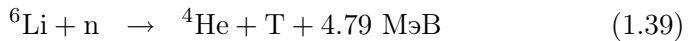
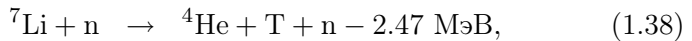
скорость которых аппроксимируется выражениями [12]

$$\langle \sigma v \rangle_{TT} \approx 5.41 \times 10^{-14} T_{keV}^{-2/3} \exp\left(-\frac{21.52}{T_{keV}^{1/3}}\right) \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}, \quad (1.36)$$

$$\langle \sigma v \rangle_{\text{He}^3\text{He}^3} \approx 1.93 \times 10^{-12} T_{keV}^{-2/3} \exp\left(-\frac{54.22}{T_{keV}^{1/3}}\right) \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}. \quad (1.37)$$

И хотя побочные реакции не оказывают ощутимого влияния на общую динамику ТЯ вспышки (именно в этом смысле они являются побочными), некоторые из них могут представлять интерес либо с точки зрения диагностики, либо с точки зрения образования отдельных нуклидов и ядерных частиц.

Важным обстоятельством для УТС является наличие в природе и стоимость добычи (производства) компонент ТЯ горючего. С дейтерием проблем нет, так как он стабилен и достаточно широко распространён: его доля по отношению к водороду составляет около 1.5×10^{-4} . С тритием ситуация сложнее, поскольку он радиоактивен, обладает сравнительно коротким периодом полураспада (в ядро ³He с испусканием электрона) 12.3 года, и по этой причине отсутствует в природе. Производить тритий для нужд УТС предполагается с помощью реакций

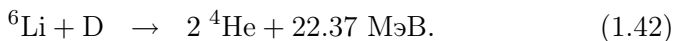
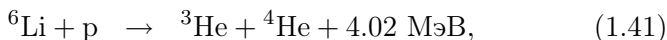
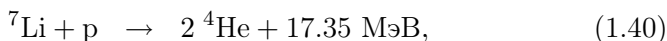


в литиевом blankets ТЯ реактора. Первая из этих реакций эндотермична и может идти только на быстрых нейтронах с энергией $> 2.47 \text{ МэВ}$, т.е. только на первичных нейтронах DT-реакции. Достоинством этой реакции является тот факт, что рождение

ядра Т не сопровождается гибелью нейтрона. Более медленные нейтроны [в том числе и испускаемые в реакции (1.38)] могут рождают тритий, поглощаясь на ${}^6\text{Li}$, выделяя при этом дополнительную энергию. Напомним, что природный литий состоит на 92.4 % из изотопа ${}^7\text{Li}$ и лишь на 7.6 % из изотопа ${}^6\text{Li}$.

Будучи самым легковоспламенимым, ДТ-топливо в то же время обладает двумя крупными недостатками: во-первых, это топливо уже само по себе сильно радиоактивно, а во-вторых, в процессе его горения возникает интенсивная нейтронная нагрузка на конструкционные элементы ТЯ реактора; как следствие, возникает проблема наведённой радиоактивности. Альтернативные виды ТЯ горючего, которые принято называть перспективными, призваны избавиться от этих недостатков. В первую очередь, к ним, конечно же, следует отнести уже упоминавшиеся чистый дейтерий и эквимольную смесь D^3He . Одним из препятствий на пути использования D^3He -топлива является низкая распространённость (на уровне 1.4×10^{-6} от изотопа ${}^4\text{He}$) изотопа ${}^3\text{He}$.

В качестве следующих кандидатов на роль перспективного топлива должны быть рассмотрены различные варианты смеси водорода и дейтерия с изотопами лития, основанные на реакциях



Здесь оба реагента нерадиоактивны и достаточно широко распространены в природе. Продуктами являются стабильные ядра гелия, энергию которых сравнительно легко утилизировать. Слабая нейтронная нагрузка может возникнуть только из-за некоторых побочных реакций типа, скажем, ${}^4\text{He} + \text{D} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{p} + \text{n} - 2.22 \text{ МэВ}$. К сожалению, как видно из рис. 1.3, реакции (1.40)–(1.42) протекают существенно медленнее, чем $\text{D}+\text{D}$ и $\text{D}+{}^3\text{He}$ [12]. Последнее означает, что к освоению водородно-литиевого топлива можно будет приступить лишь после того, как будет проде-

монстрировано зажигание $D+D$ или $D+{}^3\text{He}$ реакций. Отметим, что смесь дейтерия и лития-6 реально используется в ТЯ оружии, но там всегда присутствуют интенсивные потоки нейтронов, которые по реакции (1.39) создают тритий “на месте” [15].

Заманчивым вариантом ТЯ топлива является смесь водорода и изотопа бора ${}^{11}\text{B}$ (ВН-топливо). Оба компонента этого топлива нерадиоактивны и в изобилии присутствуют на Земле. Основная реакция, протекающая в ВН-топливе, имеет вид



По сути эта реакция является реакцией ядерного расщепления, а не синтеза; она экзотермична только благодаря сильному локальному максимуму энергии связи у изотопа ${}^4\text{He}$ (см. рис. 1.1). Несмотря на более высокий, чем в LiH-топливе, кулоновский барьер, при высоких температурах $T \gtrsim 100$ кэВ эта реакция идёт быстрее [14], чем (1.40)–(1.42) (см. рис. 1.3). Однако из-за низкой скорости ВН-реакции при умеренных температурах $T = 10$ – 100 кэВ пока не удалось сформулировать ни одной убедительной схемы УТС на основе чистого ВН-топлива.

Контрольные вопросы

1. Почему для УТС представляют интерес лишь такие ядерные реакции, которые сводятся к простой перегруппировке нуклонов в участвующих ядрах?
2. Почему УТС не удаётся основать на, казалось бы, энергетически самой выгодной реакции синтеза $D + D \rightarrow {}^4\text{He} + + 23.8 \text{ МэВ}$?
3. Каковы были бы последствия для УТС, если бы вступающие в реакцию ядра должны были преодолевать кулоновский барьер по законам классической, а не квантовой механики?

4. Какова характерная величина кулоновского барьера для бинарной ядерной реакции $Z_1 + Z_2$?
5. Объяснить происхождение низкотемпературной асимптотики $\langle \sigma v \rangle \propto \exp(-\text{const}/T^{1/3})$ в зависимости скорости ТЯ реакций $\langle \sigma v \rangle$ от температуры плазмы T .
6. Какие четыре основные ядерные реакции синтеза протекают в дейтерии?
7. Как соотносятся скорости $\langle \sigma v \rangle$ реакций $D + T$ и $D + D$ (по порядку величины) при температурах $T \simeq 5\text{--}50$ кэВ?
8. Допустим, что в ТЯ топливе созданы условия для протекания ТЯ реакции. Характерным временем реакции называется время, за которое прореагирует около половины ядер топлива. Как при прочих равных условиях это время зависит от плотности ТЯ топлива?
9. В чём потенциальные преимущества реакции $p + {}^{11}\text{B}$ по сравнению с $D + T$ реакцией?

Глава 2

Перенос энергии быстрыми продуктами ядерных реакций

Первичными носителями энергии ТЯ синтеза являются быстрые ядерные частицы (14-мэвные нейтроны и 3.5-мэвные альфа-частицы в случае DT-реакции), которые, как правило, имеют макроскопические пробеги. Последнее означает, что энергия ТЯ горения выделяется нелокально, т.е. на некотором удалении от места протекания реакции. Это обстоятельство существенно усложняет расчёт ТЯ мишеней ИТС, и в каждой конкретной схеме ИТС требует специального анализа, в каком соотношении находятся характерные размеры области горения и пробеги быстрых продуктов ТЯ реакций.

Можно, очевидно, представить себе два крайних предельных случая: оптически тонкий и оптически толстый. В оптически тонком пределе пробеги продуктов горения намного превышают размеры топлива. Ясно, что в этом пределе они уносят практически всю выделяющуюся энергию за пределы топлива, и в самом топливе не может развиваться процесс самоподдерживающегося горения. В такой ситуации для поддержания ТЯ горения

необходимо обеспечить сторонний нагрев топлива для компенсации неизбежных потерь на охлаждение.

В оптически толстом случае пробеги частиц-продуктов намного меньше размеров топлива, и в первом приближении ТЯ энерговыделение можно считать локальным. Поскольку выделяющейся энергии с лихвой хватает, чтобы нагреть до температуры зажигания новые порции топлива, то при этом становится возможен процесс самоподдерживающегося горения, эффективность которого всегда выше, чем эффективность горения под действием стороннего нагрева. На практике, как правило, реализуется промежуточный случай, когда пробеги тех или иных частиц-продуктов сравнимы с размерами объёма топлива. Чтобы иметь возможность правильно рассчитывать перенос энергии продуктами ТЯ реакций, обратимся к теории замедления и поглощения субатомных частиц в веществе и теории переноса энергии такими частицами.

2.1 Нейтронный нагрев в оптически тонком пределе

В реакциях (1.26) и (1.27) образуются быстрые нейтроны с энергией соответственно $E_n = 14.07$ МэВ и $E_n = 2.45$ МэВ. При этом в DT-топливе на долю 14-мэвных нейтронов приходится 80 % полного энерговыделения. Чтобы иметь возможность оценить, какая доля этой энергии остаётся в ТЯ топливе, рассмотрим взаимодействие нейтронов мультимэвных энергий с ядрами дейтерия и трития. В нашем случае это взаимодействие сводится к рассеянию, которое наряду с упругим может содержать и неупругие каналы. Поскольку скорость быстрых нейтронов намного превышает тепловые скорости ядер среды, последние до столкновения можно считать покоящимися. Отметим, что в силу изотопической инвариантности сильного взаимодействия можно с приемлемой точностью не делать различия между рассеянием нейтронов на ядрах ^3He и T.

Эксперименты показывают, что рассеяние интересующих нас нейтронов на ядрах дейтерия и трития является в основном упругим. Полное сечение нейтронного рассеяния на дейтерии в диапазоне энергий $1.5 \text{ МэВ} < E_n < 22 \text{ МэВ}$ с точностью 1.4 % описывается простой эмпирической формулой [16]

$$\sigma_{nD,tot} = \frac{14.35 \text{ барн}}{E_n + 3.6 \text{ МэВ}}, \quad (2.1)$$

где 1 барн = 10^{-24} см^2 , а значение энергии нейтрона E_n измеряется в МэВ. Неупругий канал, сопровождающийся расщеплением дейтрона по реакции $n + D \rightarrow n + p + n$, появляется лишь при $E_n > 3.3 \text{ МэВ}$. Для 14-мэвных ДТ-нейтронов сечение неупругого рассеяния, $\sigma_{nD,n2n} = 0.18 \text{ барн}$ [17], составляет лишь около четверти от полного сечения $\sigma_{nD,tot} = 0.81 \text{ барн}$.

Аналогично обстоит дело и для рассеяния нейтронов на ядрах трития. Поскольку тритий в большом количестве содержится лишь в ДТ-топливе, то нас в первую очередь интересует рассеяние 14-мэвных нейтронов, рождающихся в реакции (1.26). Полное сечение рассеяния при $E_n = 14.1 \text{ МэВ}$ составляет [18]

$$\sigma_{nT,tot} = 0.98 \text{ барн}. \quad (2.2)$$

При этом неупругие каналы $n + T \rightarrow D + 2n$ и $n + T \rightarrow p + 3n$ дают соответственно вклады $\sigma_{nT,n2n} \approx 0.047 \text{ барн}$ и $\sigma_{nT,n3n} \approx 0.20 \text{ барн}$ [19]. Поскольку вклад неупругого рассеяния относительно невелик, мы не допустим большой погрешности, если ниже при вычислении доли энергии, оставляемой быстрыми нейтронами в ТЯ топливе, будем для простоты предполагать, что рассеяние нейтронов с сечениями $\sigma_{nD,tot}$ и $\sigma_{nT,tot}$ является полностью упругим.

Зная полное сечение рассеяния нейтрона σ_n , можно легко найти его эффективный пробег. Действительно, пусть пучок нейтронов распространяется в среде, состоящей из нуклидов одного сорта с атомной массой A (которая близка по значению, но в общем случае не равна числу нуклонов в ядре, которое тоже принято обозначать буквой A) и объёмной концентрацией n_A

[см⁻³], а σ_{nA} — полное сечение нейтронного рассеяния на ядрах этих нуклидов. Тогда доля нейтронов, выбывающих из начального пучка на длине dx , составит $\sigma_{nA}n_A dx = (\sigma_{nA}/m_u A) \rho dx$, где ρ — плотность среды, m_u — атомная единица массы. В условиях ИТС типичной является ситуация, когда вдоль траектории нейтрона сильно изменяется плотность среды ρ , но не её ядерный состав. В этом случае начальный пучок нейтронов ослабевает в $e = 2.718\dots$ раз, проходя слой с массовой толщиной

$$\int \rho dx = \langle \rho l \rangle_{nA} = \frac{m_u A}{\sigma_{nA}} \left[\frac{\Gamma}{\text{см}^2} \right]. \quad (2.3)$$

Эту величину будем называть *эффективным (средним) массовым пробегом* (или просто *пробегом*) нейтронов. В случае, когда среда состоит из смеси элементов с долевыми концентрациями c_k по числу ядер сорта k , определение (2.3) легко обобщается к виду

$$\langle \rho l \rangle_n = m_u \frac{\sum_k c_k A_k}{\sum_k c_k \sigma_{nk}}. \quad (2.4)$$

Подставляя приведённые выше значения нейтронных сечений в (2.3), (2.4), получаем следующие значения пробегов для ДТ-нейтронов с энергией $E_n = 14.07$ МэВ,

$$\langle \rho l \rangle_{n14} = \begin{cases} 4.13 \text{ г см}^{-2} & \text{в DD-топливе,} \\ 4.67 \text{ г см}^{-2} & \text{в DT-топливе,} \end{cases} \quad (2.5)$$

и для DD-нейтронов с энергией $E_n = 2.45$ МэВ,

$$\langle \rho l \rangle_{n2} = 1.41 \text{ г см}^{-2} \quad \text{в DD-топливе.} \quad (2.6)$$

Таким образом, объём ДТ-топлива можно считать оптически тонким для 14-мэвных нейтронов, если его массовая толщина $\int \rho dx \ll 4.7 \text{ г см}^{-2}$.

Далее рассмотрим вопрос о передаче энергии быстрых нейтронов ядрам окружающей среды. В предположении чисто упругого рассеяния можно воспользоваться решением известной за-

дачи об упругом столкновении двух частиц [20, §17] и найти изменение энергии нейтрона

$$\Delta E_n = -E_n \frac{2M/m_n}{(1 + M/m_n)^2} (1 - \cos \chi) \quad (2.7)$$

в одном акте рассеяния на покоящемся ядре с массой M ; здесь m_n — масса нейтрона, E_n — его энергия до столкновения, χ — угол рассеяния в системе центра инерции (u -системе). Усредняя по углам рассеяния χ , находим среднюю относительную потерю энергии в одном рассеянии

$$\left\langle \frac{\Delta E_n}{E_n} \right\rangle = -\frac{2A}{(1 + A)^2} \nu_{nA}, \quad (2.8)$$

где

$$\nu_{nA} = \langle 1 - \cos \chi \rangle = \frac{1}{\sigma_{nA}} \int (1 - \cos \chi) d\sigma_{nA} \quad (2.9)$$

усреднённое по углам рассеяния значение $1 - \cos \chi$. При переходе от (2.7) к (2.8) мы для простоты положили $M/m_n = A$, где A — число нуклонов в рассеивающем ядре; вносимая при этом погрешность (доли процента) пренебрежимо мала, особенно при рассеянии на лёгких ядрах. Для смеси элементов с долевыми концентрациями c_k по числу ядер сорта k формула (2.8) обобщается к виду

$$\left\langle \frac{\Delta E_n}{E_n} \right\rangle = - \left[\sum_k c_k \sigma_{nk} \frac{2A_k}{(1 + A_k)^2} \nu_{nk} \right] \left(\sum_k c_k \sigma_{nk} \right)^{-1}. \quad (2.10)$$

Если бы рассеяние нейтрона в u -системе можно было считать изотропным (или, по крайней мере, симметричным относительно направлений вперёд-назад), то мы имели бы $\nu_{nA} = 1$. Воспользовавшись реально измеренными дифференциальными сечениями упругого рассеяния из [21], нетрудно вычислить, что для 14-мэвных ДТ-нейтронов

$$\nu_{nD} \approx 0.80, \quad \nu_{nT} \approx 0.74. \quad (2.11)$$

Подставляя эти значения в формулу (2.10), находим среднюю долю энергии, оставляемую 14-мэвными нейтронами в DT-топливе при первом рассеянии

$$\left\langle \frac{|\Delta E_n|}{E_n} \right\rangle_{DT} = \frac{\frac{4}{9} \times 0.80 \times 0.81 \text{ барн} + \frac{3}{8} \times 0.74 \times 0.98 \text{ барн}}{0.81 \text{ барн} + 0.98 \text{ барн}} = 0.31. \quad (2.12)$$

Для рассеяния 2.45-мэвных DD-нейтронов на ядрах дейтерия с точностью около 1 % имеем $\nu_{nD} = 1.0$, и доля энергии, оставляемая этими нейтронами при первом рассеянии в DD-топливе, равна $\frac{4}{9}$.

Теперь можно легко оценить роль нейтронного нагрева в оптически тонком пределе, когда пробег нейтронов существенно превышает размер ТЯ топлива. В качестве простейшего примера рассмотрим сферическую конфигурацию топлива радиусом R с однородным распределением температуры и плотности, обеспечивающим однородную интенсивность рождения нейтронов по всему объёму сферы. Пусть $1 - \varphi_s$ — доля от всех родившихся нейтронов, которые покидают сферу топлива, не испытав ни одного рассеяния; соответственно, φ_s — это доля от всех нейтронов, которые испытывают одно или более рассеяний. Эта безразмерная величина определяется значением одного безразмерного параметра, а именно, *оптической толщины* рассматриваемой сферы топлива по нейтронному рассеянию

$$\tau_n = \frac{R}{\langle l \rangle_n} = \frac{\rho R}{\langle \rho l \rangle_n}, \quad (2.13)$$

где $\langle \rho l \rangle_n$ — определённый в (2.4) эффективный массовый пробег нейтронов, $\langle l \rangle_n$ — их эффективный геометрический пробег, ρ — плотность ТЯ топлива в рассматриваемой сфере.

Чтобы вычислить φ_s , рассмотрим нейтрон, который рождается внутри сферы топлива в точке с радиус-вектором \vec{r} (рис. 2.1) и летит в направлении единичного вектора \vec{n} . Расстояние x от точки рождения до внешней границы сферы даётся выражением

$$x = -r\mu + (R^2 - r^2 + r^2\mu^2)^{1/2}, \quad (2.14)$$

где

$$\mu = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r} = \cos \theta \quad (2.15)$$

косинус угла θ между направлениями \vec{r} и \vec{n} . Вероятность того, что рассматриваемый нейтрон свободно выйдет из топлива, равна

$$\varphi_{esc}(\mu, r, R) = \exp(-x/\langle l \rangle_n). \quad (2.16)$$

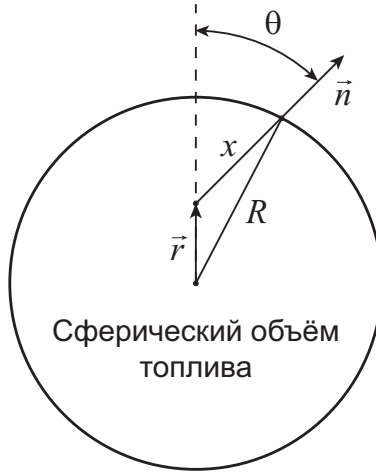


Рис. 2.1. Схема вылета нейтрона из однородной сферы термоядерного топлива

Поскольку все направления вылета нейтрона равновероятны, искомая величина $1 - \varphi_s$ получается усреднением $\varphi_{esc}(\mu, r, R)$ по телесному углу с полярной осью вдоль \vec{r} и по объёму сферы $r < R$:

$$1 - \varphi_s = \frac{3}{R^3} \int_0^R \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_{esc}(\mu, r, R) d\mu \right] r^2 dr. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.16) и (2.14) в (2.17) и переходя от интегрирования по μ к интегрированию по x , нетрудно убедиться, что возникающий двукратный интеграл можно вычислить аналитически. В результате, для полной доли нейтронов φ_s , испытавших по крайней мере одно рассеяние в сфере с оптической толщиной τ_n , получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi_s &= 1 - \frac{3}{4\tau_n} \left[1 - \exp(-2\tau_n) - \frac{1 - (1 + 2\tau_n + 2\tau_n^2) \exp(-2\tau_n)}{2\tau_n^2} \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{3}{4}\tau_n, & \tau_n \ll 1, \\ 1 - \frac{3}{4\tau_n}, & \tau_n \gg 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

В оптически тонком пределе $\tau_n \ll 1$ величина φ_s фактически представляет нейтроны, испытавшие только одно рассеяние; доля нейтронов, испытавших $m \geq 2$ рассеяний, пропорциональна τ_n^m и является величиной более высокого порядка малости. В результате, перемножая (2.12) и (2.18), получаем следующее выражение для суммарной доли энергии, оставляемой 14-мэвными нейтронами в сферическом объёме ДТ-топлива:

$$\frac{|\Delta E_{n14}|}{E_{n14}} = \varphi_s \left\langle \frac{|\Delta E_n|}{E_n} \right\rangle_{\text{ДТ}} = 0.23\tau_n = 0.23 \frac{\rho R}{\langle \rho l \rangle_n}; \quad (2.19)$$

здесь E_{n14} — энергия всех 14-мэвных нейтронов, рождённых за некоторый (произвольный) промежуток времени в рассматриваемой ДТ-сфере. В частности, видим, что при $(\rho R)_{\text{ДТ}} \leq 1 \text{ г см}^{-2}$ (типичный размер области зажигания в ДТ-топливе) нейтроны оставляют в топливе менее 5 % своей энергии — что служит оправданием для пренебрежения нейтронным нагревом в ДТ-мишенях ИТС.

В DD-топливе нейтроны с энергиями $E_n = 2.45 \text{ МэВ}$ и $E_n = 14.07 \text{ МэВ}$ рождаются в почти равной пропорции в реакциях (1.26)–(1.28). Характерные значения параметра ρR в DD-топливе больше, чем в ДТ, и его уже нельзя считать оптически тонким

для нейтронов, особенно с энергией 2.45 МэВ. В такой ситуации адекватный учёт нейтронного нагрева требует решения соответствующего уравнения переноса нейтронов.

2.2 Общие понятия теории кулоновского торможения заряженных частиц

Существуют два основных теоретических подхода при вычислении потерь энергии быстрой заряженной частицей в веществе: формализм парных столкновений и формализм диэлектрической проницаемости. Формализм парных столкновений основан на предположении, что торможение быстрой частицы представляет собой аддитивный эффект большого числа независимых столкновений с атомными частицами среды. Применение этого формализма обосновано лишь тогда, когда отсутствуют взаимные корреляции в реакции отдельных частиц среды на пролетающий проектиль.

Формализм диэлектрической проницаемости, детально изложенный в курсе электродинамики сплошных сред Ландау и Лифшица [22, гл. XIV], предполагает, что все масштабы длин, характеризующих взаимодействие быстрого заряда со средой, существенно превышают расстояния между атомными частицами среды. В этом пределе тормозящее вещество мишени можно считать непрерывной сплошной средой. Возможные корреляции в отклике частиц мишени на воздействие со стороны пролетающего заряда учитываются автоматически при вычислении диэлектрической проницаемости вещества мишени.

Легко понять, что два указанных способа описания тормозящей среды в определённом отношении взаимно дополняют друг друга. Действительно, формализм парных столкновений в его простейшей трактовке применим тогда, когда в поле действия быстрого заряда в каждый данный момент времени находится не более одной атомной полевой частицы. Понятие диэлектрической проницаемости, напротив, применимо лишь тогда, когда в

поле действия быстрого заряда в каждый момент находится много полевых частиц. Оба этих формализма сталкиваются с проблемой кулоновской расходимости, но, в силу взаимной дополнителности, на разных пределах интегрирования: формализм парных столкновений — при малых переданных импульсах (больших прицельных параметрах), формализм диэлектрической проницаемости — при больших переданных импульсах (малых прицельных параметрах). К счастью, во многих типичных случаях между областями применимости двух формализмов существует широкая область перекрытия, позволяющая путём их согласованного совместного применения устранить кулоновскую расходимость.

Теория кулоновских потерь энергии в её современном виде была заложена в классических работах Бора [23, 24] и Бете [25, 26]. Соответствующие формулы были получены в рамках формализма парных столкновений. Здесь приведём основные результаты по теории кулоновского торможения как в холодном нейтральном веществе, так и в горячей плазме, которые требуется знать при расчёте систем ИТС. При этом также будем исходить из теории парных столкновений, уделив пристальное внимание выводу формулы Бора в нерелятивистском пределе. Более полное изложение теории кулоновского торможения можно найти, например, в монографии П. Зигмунда [27].

В теории парных столкновений скорость потерь энергии быстрой частицей в соударениях с покоящимися (или медленными) полевыми частицами даётся общей формулой

$$\frac{dE}{dt} = n_2 v \int \Delta E_1 d\sigma, \quad (2.20)$$

где E — энергия быстрой частицы, v — её скорость, n_2 [см⁻³] — объёмная концентрация полевых частиц, $d\sigma$ — дифференциальное сечение столкновений. Если быстрая частица имеет определённое значение энергии E (моноэнергетический пучок), то формула (2.20) является вполне строгой и имеет прозрачный фи-

зический смысл: $n_2 v d\sigma$ есть среднее число столкновений быстрой частицы в единицу времени с рассеянием на определённый угол, тогда как ΔE_1 есть изменение её энергии в каждом таком столкновении. Интегрирование в (2.20) производится по тем переменным, относительно которых раскрывается дифференциал $d\sigma$. В случае покоящихся (или медленных по сравнению с пролетающим зарядом) полевых частиц формула (2.20) является также релятивистски правильной, поскольку релятивистски инвариантное сечение $d\sigma$ определено в системе покоя полевых частиц.

Понятно, что в формуле (2.20) уже заложено предположение о статистической независимости отдельных парных столкновений, приводящее к тому, что полная величина энергетических потерь есть просто сумма потерь по отдельным столкновениям. При этом, вообще говоря, совсем не обязательно предполагать, что отдельные столкновения следуют одно за другим во времени: большое число столкновений может происходить одновременно — лишь бы полевые частицы были расположены в пространстве случайным образом, а взаимодействие каждой отдельной полевой частицы с пролетающим зарядом не было искажено ответной реакцией других полевых частиц. Статистическая природа отдельных столкновений приводит также к тому, что энергия быстрой частицы E является, строго говоря, случайной величиной, ширина распределения которой растёт во времени. Последнее означает, что на конечном интервале времени формулу (2.20) можно применять лишь в рамках приближения $\Delta E \ll E$, где ΔE — ширина статистического разброса по энергии замедляющейся быстрой частицы.

Вместо dE/dt для описания кулоновского торможения часто используют две другие величины, а именно: *тормозную способность*

$$\frac{dE}{dx} = n_2 \int \Delta E_1 d\sigma, \quad (2.21)$$

и эффективное торможение

$$S = - \int \Delta E_1 d\sigma. \quad (2.22)$$

Выражение (2.21) получается из (2.20) делением на v и обозначением $v dt = dx$. Как и формула (2.20), тормозная способность (2.21) строго определена лишь для быстрого заряда с определённым значением скорости \vec{v} . В этом случае она представляет собой силу торможения и даёт “мгновенную” скорость энергетических потерь на единицу длины вдоль направления скорости \vec{v} . На конечном интервале длины, по мере набора статистических отклонений от первоначального направления движения, формулу (2.21) можно применять лишь постольку, поскольку выполняются соотношения $\Delta E \ll E$ и $\Delta\theta \ll 1$, где $\Delta\theta$ — средний угол отклонения траектории быстрого заряда от первоначального направления скорости \vec{v} .

Величина эффективного торможения S удобна тем, что для её вычисления достаточно рассмотреть один акт столкновения с полевой частицей. Поскольку при торможении быстрых частиц $dE/dt < 0$, то эффективное торможение S по своему смыслу положительно.

2.3 Кулоновское торможение в приближении быстрого пролёта

Формулу для кулоновских потерь энергии проще всего вывести в рамках классической механики в приближении быстрого пролёта. Пусть быстрая пробная частица с зарядом e_1 , массой покоя m_1 и скоростью \vec{v} пролетает сквозь облако полевых частиц (частиц мишени), имеющих заряд e_2 и массу m_2 . Рассмотрение проведём с учётом релятивистских эффектов, т.е. не предполагая, что $v = |\vec{v}| \ll c$, где c — скорость света. Быстрой считается частица, скорость которой v существенно превосходит все атомные и тепловые скорости электронов и ядер в тормозящем веще-

стве. При этом ядра и электроны тормозящей среды можно для начала рассматривать по отдельности как точечные заряженные частицы соответствующего сорта, каждая из которых до столкновения покоится.

Рассмотрим отдельное столкновение быстрого заряда с полевой частицей, значения импульса которой до и после столкновения составляют соответственно $\vec{p}_2 = 0$ и $\vec{p}'_2 = \vec{p}_2 + \vec{q} = \vec{q}$. В рамках классической механики такое столкновение удобно характеризовать прицельным параметром \vec{b} , как это показано на рис. 2.2. Вектор \vec{b} перпендикулярен прямолинейной траектории быстрого заряда, которую тот имел бы при отсутствии взаимодействия с полевой частицей, и направлен в точку исходного положения полевой частицы. Линию исходного движения быстрого заряда примем за ось x лабораторной системы координат. Тогда вектор исходной скорости \vec{v} направлен вдоль оси x , а вектор \vec{b} лежит в плоскости yz , где его компоненты составляют

$$\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\} = \{0, b \cos \phi, b \sin \phi\}; \quad (2.23)$$

здесь ϕ — азимутальный угол в плоскости yz . Хотя в конкретном примере, изображённом на рис. 2.2, азимут $\phi = 0$, в общем случае, когда приходится интегрировать по всем возможным значениям прицельного параметра \vec{b} , необходимо учесть полный интервал значений $0 \leq \phi < 2\pi$. Величина b вектора \vec{b} равна расстоянию исходного положения полевой частицы до оси x . При рассмотрении отдельного столкновения момент времени $t = 0$ выбирается так, чтобы соответствовать моменту максимального сближения быстрого заряда с полевой частицей при отсутствии взаимодействия между ними.

В рассматриваемой задаче приближение быстрого пролёта (или приближение кратковременного удара) является по сути первым порядком классической теории возмущения: результат взаимодействия вычисляется в первом порядке теории возмущений по взаимодействию, т.е. с использованием невозмущённых траекторий движения взаимодействующих частиц. Другими сло-

вами, мы вычисляем импульс \vec{q} , переданный полевой частице, (а) пренебрегая смещением полевой частицы, и (б) пренебрегая искривлением траектории быстрого заряда в процессе столкновения. Смещением полевой частицы за характерное время столкновения $t_c \simeq b/v$ можно, очевидно, пренебречь тогда, когда оно мало по сравнению с b . Последнее, в свою очередь, означает, что в случае применимости приближения быстрого пролёта скорость v'_2 , приобретаемая полевой частицей в ходе столкновения, будет мала по сравнению со скоростью быстрого заряда v , и, в частности, мала по сравнению со скоростью света c .

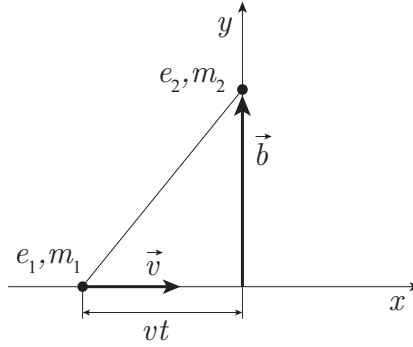


Рис. 2.2. Столкновение быстрого заряда e_1, m_1 , летящего со скоростью \vec{v} , с покоящейся полевой частицей e_2, m_2

В рамках наших приближений импульс \vec{q} , переданный полевой частице, легко вычисляется по формуле

$$\vec{q} \equiv \vec{p}'_2 - \vec{p}_2 = e_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\mathcal{E}} dt, \quad (2.24)$$

где $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}(t)$ — электрическое поле в точке нахождения полевой частицы, создаваемое быстрым зарядом. Действием магнитного поля быстрого заряда можно пренебречь, поскольку соответствующий член в силе Лоренца пропорционален малой величине

v_2'/c и возникает лишь в следующем порядке теории возмущения. Отметим, что выражение (2.24) справедливо в общем случае релятивистского движения быстрого заряда, когда v не мало по сравнению с c .

Вектор электрического поля $\vec{\mathcal{E}}$ можно разложить на продольную (вдоль вектора \vec{v}) и поперечную (вдоль вектора \vec{b}) составляющие:

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{\parallel} \frac{\vec{v}}{v} + \mathcal{E}_{\perp} \frac{\vec{b}}{b}. \quad (2.25)$$

Релятивистские выражения для продольной и поперечной компонент поля, создаваемого равномерно движущимся зарядом e_2 , имеют вид [9, §38], [28, гл. 13]

$$\mathcal{E}_{\parallel}(t) = -\frac{e_1 vt(1-\beta^2)}{[b^2(1-\beta^2) + v^2 t^2]^{3/2}}, \quad (2.26a)$$

$$\mathcal{E}_{\perp}(t) = \frac{e_1 b(1-\beta^2)}{[b^2(1-\beta^2) + v^2 t^2]^{3/2}}, \quad (2.26b)$$

где $\beta = v/c$. Сразу видно, что отличной от нуля будет лишь поперечная компонента переданного импульса, которая даётся выражением

$$\begin{aligned} q_{\perp} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e_2 \mathcal{E}_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e_1 e_2 b(1-\beta^2)}{[b^2(1-\beta^2) + v^2 t^2]^{3/2}} dt = \\ &= \frac{e_1 e_2}{bv} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} = \frac{2e_1 e_2}{vb}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Отметим, что переданный импульс $q = |q_{\perp}|$ не зависит от масс сталкивающихся частиц.

Зная переданный импульс, можем воспользоваться законом сохранения энергии и определить энергию, теряемую быстрым зарядом в одном столкновении с прицельным параметром b :

$$\Delta E_1 = -E_2' = -\frac{q^2}{2m_2} = -\frac{2e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2 b^2}. \quad (2.28)$$

Использование нерелятивистского выражения для энергии полевой частицы $E_2' = (p_2')^2/2m_2$ опять-таки оправдано условием $v_2' \ll v < c$, выполняющимся в рамках приближения быстрого пролёта. Как видно из выражений (2.27) и (2.28), всегда существует область достаточно больших значений прицельного параметра b , при которых движение рассеянных полевых частиц можно считать нерелятивистским.

Полное эффективное торможение S , определённое в (2.22), находится интегрированием в цилиндрических координатах (b, ϕ) по плоскости всех значений вектора прицельного параметра \vec{b} ,

$$S = - \iint \Delta E_1 b db d\phi = \frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2} L, \quad (2.29)$$

где безразмерная величина

$$L = \int \frac{db}{b} \quad (2.30)$$

представляет собой известный кулоновский логарифм. На языке прицельных параметров произведение $b db d\phi$ играет, очевидно, роль дифференциального сечения рассеяния $d\sigma$. Поскольку величина L не всегда является логарифмом, для неё в англоязычной литературе употребляется отдельное название — *stopping number*, которое мы переведём как *коэффициент торможения*. Если не заострять внимания на кулоновском логарифме (о котором речь ниже), то выражение (2.29) представляет собой правильную релятивистскую формулу, так как при её выводе нигде не предполагалось $v \ll c$. Более того, поскольку при достаточно больших значениях L приближение быстрого пролёта оказывается справедливым в логарифмически широком интервале значений b , то можно догадаться, что уточнение этого приближения может привести лишь к изменению самого кулоновского логарифма L , но не выражения, стоящего перед ним.

Формально интегрирование в (2.30) необходимо выполнить в пределах $0 \leq b < \infty$. Видно, что в рамках приближения быст-

рого пролёта кулоновский логарифм (2.30) расходится на обоих пределах интегрирования. Легко понять, что расходимость на нижнем пределе $b = 0$ обусловлена спецификой самого этого приближения и, как будет показано в следующем параграфе, легко устраняется при переходе к строгой теории рассеяния на кулоновском потенциале. Действительно, в общем случае передача энергии покоящейся полевой частице в упругом столкновении ограничена величиной [20, § 13]

$$(\Delta E_2)_{\max} = \frac{2m^2v^2}{m_2} \gamma^2 \left[1 + \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} (\gamma - 1) \right]^{-1} \leq \frac{2m^2v^2}{m_2} \gamma^2, \quad (2.31)$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор, а

$$m = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad — \quad (2.32)$$

приведённая масса сталкивающихся частиц. А так как формула (2.28), согласно которой $\Delta E_2 = -\Delta E_1 \propto b^{-2}$, вступает в противоречие с этим фактом при $b \rightarrow 0$, то и сама формула (2.28), и приближение быстрого пролёта, в котором она получена, становятся заведомо неприменимы при достаточно малых значениях b . Более точно, область применимости приближения быстрого пролёта, по крайней мере, ограничена прицельными параметрами

$$b > \frac{b_0}{\gamma}, \quad b_0 = \frac{|e_1e_2|}{mv^2}. \quad (2.33)$$

Это условие получается из соотношения $|\Delta E_1| < 2m^2v^2\gamma^2/m_2$, где ΔE_1 определяется выражением (2.28).

Будучи концептуально очень прозрачным, приближение быстрого пролёта позволяет довольно просто проанализировать вопрос о применимости теории парных столкновений. Казалось бы, теория парных столкновений должна быть применима лишь тогда, когда (а) положения полевых частиц некоррелированы между собой, и (б) столкновения с полевыми частицами происходят

последовательно одно за другим, т.е. в “сфере столкновения” размером b_{\max} [максимальное значение прицельного параметра b , на котором следует обрезать интегрирование в кулоновском логарифме (2.30)] находится в среднем меньше одной полевой частицы, $n_2 b_{\max}^3 < 1$. Однако из проведённого выше рассмотрения ясно, что если применимо приближение быстрого пролёта и полевые частицы можно считать свободными и покоящимися, то выполнение условия (б) совсем не обязательно. Действительно, если в процессе быстрого столкновения полевые частицы не успевают изменить своё положение, то и никаких дополнительных корреляций в их расположении, которые позволили бы заэкранировать электрическое поле пролетающего иона, не возникнет. А тогда каждая полевая частица получает “толчок” q , даваемый выражением (2.27), независимо от того, сколько полевых частиц находится одновременно в области размером b_{\max} . Последнее фактически означает, что с логарифмической точностью (т.е. при $L \gg 1$) теория парных столкновений всегда применима для расчёта кулоновского торможения в неупорядоченных средах; при этом не играет никакой роли, сколько полевых частиц одновременно находится в сфере столкновения. Другое дело, что в теории чисто парных столкновений не всегда удаётся вычислить правильное значение кулоновского логарифма L .

2.4 Строгая теория кулоновского рассеяния

Изложенный выше вывод формулы (2.29) обладает следующими двумя важными недостатками. Во-первых, в нём использованы классические понятия траектории и прицельного параметра, которые неприменимы в квантовой теории рассеяния. Напомним, что для рассеяния на кулоновском потенциале классическое рассмотрение должно быть заменено на квантовое [11, §49] при

$$\alpha_v = \frac{|e_1 e_2|}{\hbar v} \lesssim 1. \quad (2.34)$$

Во-вторых, приближение быстрого пролёта приводит к расходимости интеграла в (2.30) на нижнем пределе $b = 0$ из-за пренебрежения искривлением траекторий в процессе столкновения. От обоих этих недостатков легко избавиться, проведя строгое рассмотрение на языке переданных импульсов и воспользовавшись дифференциальным сечением Резерфорда, описывающим рассеяние на кулоновском потенциале. При этом важную роль играет то счастливое обстоятельство, что именно для рассеяния на кулоновском потенциале нерелятивистская квантовая механика и нерелятивистская классическая механика дают один и тот же результат [11, §135]. Соответственно, в этом параграфе ограничимся нерелятивистским случаем и проведём все вычисления в предположении $v \ll c$.

Как и прежде, рассмотрим столкновение быстрой частицы, имеющей заряд e_1 , массу m_1 и скорость \vec{v} , с первоначально покоящейся полевой частицей e_2 , m_2 . В лабораторной системе (\mathcal{L} -системе) значения импульса и энергии этих частиц до столкновения составляют

$$\begin{aligned} \text{быстрый заряд:} & \quad \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}, & E_1 &= \vec{p}_1^2 / 2m_2, \\ \text{полевая частица:} & \quad \vec{p}_2 = 0, & E_2 &= 0; \end{aligned} \quad (2.35)$$

эти же величины после столкновения будут равны

$$\begin{aligned} \text{быстрый заряд:} & \quad \vec{p}'_1 = \vec{p}_1 - \vec{q}, & E'_1 &= (\vec{p}'_1)^2 / 2m_2, \\ \text{полевая частица:} & \quad \vec{p}'_2 = \vec{p}_2 + \vec{q} = \vec{q}, & E'_2 &= \vec{q}^2 / 2m_2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Переданный импульс $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}'_1 = \vec{p}'_2 - \vec{p}_2$ в нерелятивистском случае не зависит от системы отсчёта, и его удобно вычислить в системе центра инерции (\mathcal{U} -системе).

В \mathcal{U} -системе импульсы сталкивающихся частиц,

$$\vec{p}_{1c} = -\vec{p}_{2c} = \vec{p} = m\vec{v}, \quad (2.37)$$

равны по модулю и противоположны по направлению; здесь m — приведённая масса (2.32). В силу закона сохранения энергии модуль импульса \vec{p} в \mathcal{U} -системе сохраняется, а процесс рассеяния

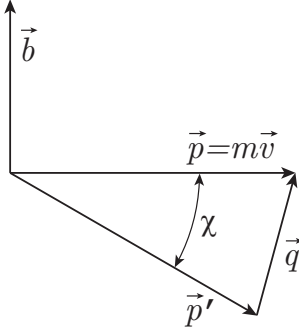


Рис. 2.3. Импульсная диаграмма столкновения в ζ -системе

сводится к повороту вектора \vec{p} на некоторый угол $0 \leq \chi \leq \pi$. Переданный импульс $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ удобно разложить на продольную и поперечную составляющие,

$$\vec{q} = q_{\parallel} \frac{\vec{v}}{v} + q_{\perp} \frac{\vec{b}}{b}, \quad (2.38)$$

для которых легко находим (см. рис. 2.3)

$$q_{\parallel} = mv(1 - \cos \chi) = 2mv \sin^2 \frac{\chi}{2}, \quad (2.39)$$

$$q_{\perp} = mv \sin \chi = 2mv \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2}. \quad (2.40)$$

Поскольку теперь не используется понятие прицельного параметра, то вектор \vec{b} следует интерпретировать как некий вектор, перпендикулярный импульсу \vec{p} и лежащий в той же плоскости, что вектора \vec{q} и \vec{p}' ; направление вектора \vec{b} выбирается так, чтобы проекция q_{\perp} была положительна. Абсолютная величина переданного импульса составляет

$$q = \left(q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2 \right)^{1/2} = 2mv \sin \frac{\chi}{2}. \quad (2.41)$$

Максимальный переданный импульс

$$q_{\max} = 2mv \quad (2.42)$$

соответствует углу поворота $\chi = \pi$ в u -системе. Изменение энергии быстрого заряда в одном столкновении необходимо вычислять в l -системе, где оно очевидно равно

$$\Delta E_1 = -\Delta E_2 = -\frac{q^2}{2m_2}. \quad (2.43)$$

В нерелятивистском случае дифференциальное сечение рассеяния на кулоновском потенциале (сечение Резерфорда) записывается в виде [11, §135]

$$d\sigma = \frac{e_1^2 e_2^2}{4m^2 v^4} \frac{d\Omega}{\sin^4(\chi/2)} = \frac{4e_1^2 e_2^2}{v^2} \frac{dq d\phi}{q^3}. \quad (2.44)$$

Мы здесь воспользовались выражением $d\Omega = \sin \chi d\chi d\phi$ для элемента телесного угла, а также формулой (2.41) для преобразования от независимой переменной χ к новой переменной q . Подставляя (2.43) и (2.44) в (2.22) и интегрируя по переменным ϕ и q , получаем для эффективного торможения ту же формулу (2.29), что и в приближении быстрого пролёта, но со значением кулоновского логарифма

$$L = \int_0^{q_{\max}} \frac{dq}{q} = \ln \frac{2mv}{q_{\min}}. \quad (2.45)$$

Теперь кулоновский логарифм расходится лишь на одном пределе, а именно, при малых переданных импульсах $q \rightarrow 0$. Для определения минимального переданного импульса q_{\min} , на котором следует обрезать интегрирование в (2.45), потребуются дополнительные физические соображения.

Проведённое здесь рассмотрение справедливо в рамках как классической (нерелятивистской), так и квантовой механики.

Тот факт, что при этом получаем один и тот же результат, выраженный формулами (2.29) и (2.45), является, конечно же, следствием специфики рассеяния на кулоновском потенциале, для которого квантовая и классическая механика дают одно и то же дифференциальное сечение. Кулоновская расходимость возникает лишь в пределе малых переданных импульсов, т.е. единственной неопределённой величиной остаётся минимальный переданный импульс q_{\min} . Отсюда можно сделать важный вывод, что различие между квантовым и классическим вариантами формулы (2.29) для кулоновских потерь энергии может возникнуть лишь под знаком логарифма и лишь при вычислении q_{\min} .

Формулу (2.45) для кулоновского логарифма можно также получить, проводя рассуждения и на классическом языке прицельных параметров. Угол χ поворота импульса в u -системе связан с прицельным параметром b соотношением [20, §19]

$$\sin^2 \frac{\chi}{2} = \frac{1}{1 + (b/b_0)^2}, \quad (2.46)$$

где прицельный параметр b_0 поворота на 90° определён в (2.33). Компоненты переданного импульса и передача энергии в одном столкновении составляют

$$q_{\parallel} = \frac{2mv}{1 + (b/b_0)^2}, \quad (2.47)$$

$$q_{\perp} = 2mv \frac{b/b_0}{1 + (b/b_0)^2} \text{sign}(e_1 e_2), \quad (2.48)$$

$$\Delta E_1 = -\frac{q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2}{2m_2} = -\frac{2mv^2}{1 + (b/b_0)^2} \frac{m}{m_2}. \quad (2.49)$$

Подставляя (2.49) и значение $d\sigma = 2\pi b db$ в (2.22), опять приходим к формуле (2.29) со значением кулоновского логарифма

$$L = \int_0^{\infty} \frac{b db}{b^2 + b_0^2} = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{b_{\max}}{b_0} \right)^2 \right] = \ln \frac{2mv}{q_{\min}}, \quad (2.50)$$

где $q_{\min} = 2mv/\sqrt{1 + (b_{\max}/b_0)^2}$. Как и следовало ожидать, кулоновский логарифм в данном представлении расходится на больших прицельных параметрах $b \rightarrow \infty$, соответствующих малым переданным импульсам; неопределённой величиной остаётся максимальный прицельный параметр b_{\max} .

2.5 Общие закономерности кулоновского торможения

Воспользовавшись связью между тормозной способностью dE/dx и эффективным торможением S , перепишем полученную выше формулу для кулоновских потерь в общепринятом виде

$$\frac{dE}{dx} = -n_2 S = -\frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{m_2 v^2} n_2 L. \quad (2.51)$$

Поскольку при выводе этой формулы предполагалось, что полевые частицы до столкновения покоятся, она должна описывать торможение быстрых частиц, скорость которых v существенно превышает скорости теплового или внутриатомного движения полевых частиц. Ниже убедимся, что в этом случае, как правило, $q_{\max} \gg q_{\min}$, кулоновский логарифм L достаточно велик, и в первом приближении можно не интересоваться его слабой зависимостью от характеристик среды и самой быстрой частицы, а попросту считать L некоторой постоянной. В рамках этих оговорок можно установить следующие важные общие закономерности кулоновского торможения.

Прежде всего заметим, что тормозная способность (2.51) не зависит от знака произведения $e_1 e_2$. Другими словами, торможение заряженной частицы не зависит от того, притягивает она полевые частицы или отталкивает. Это, в частности, означает, что кулоновские пробеги частиц и античастиц с одинаковой начальной энергией должны быть одинаковы. Однако, как показывает более детальное исследование проблемы, такая зарядовая инвариантность выполняется лишь для главного члена асимптотиче-

ского разложения dE/dx по большому параметру скорости быстрого заряда v ; уже в следующих поправочных членах возникает различие между кулоновским притяжением и отталкиванием [29], которое принято называть эффектом Баркаса—Андерсена (the Barkas—Andersen effect) [27], и относительная роль которого возрастает с уменьшением v .

Следующее важное обстоятельство состоит в том, что тормозная способность (2.51) обратно пропорциональна массе полевых частиц m_2 . Объясняется это тем простым фактом, что переданный в одном столкновении импульс q (2.24) не зависит от масс сталкивающихся частиц, а переданная энергия есть $q^2/2m_2$. Как следствие, основной вклад в кулоновское торможение почти всегда даёт взаимодействие с электронами среды, масса которых, по крайней мере, в 1836 раз меньше массы атомных ядер. Исключением из этого правила являются лишь отдельные случаи, как, например, торможение не слишком быстрого тяжелого иона с $Z_1 \gg 1$ в среде с $Z_2 \gg 1$, когда для рассеяния на ядрах возрастание фактора $e_1^2 e_2^2$ с лихвой компенсирует уменьшение величины n_2/m_2 .

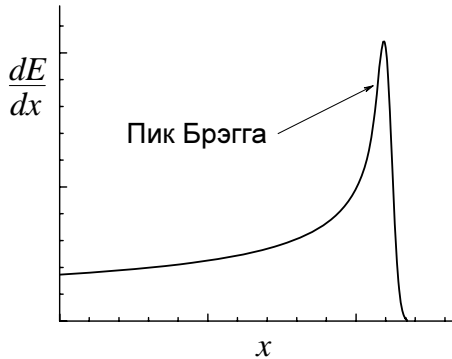


Рис. 2.4. Профиль кулоновской тормозной способности вдоль траектории быстрой частицы с максимумом в пике Брэгга в конце пробега

Будучи обратно пропорциональной v^2 , тормозная способ-

ность (2.51) возрастает с уменьшением энергии быстрого заряда E . В результате, скорость потерь энергии на единицу длины траектории имеет ярко выраженный максимум к концу пробега, как это показано на рис. 2.4. Этот максимум носит название пика Брэгга (the Bragg peak). При $v \rightarrow 0$ рост dE/dx происходит, конечно же, не до бесконечных значений, как можно было бы подумать, глядя на формулу (2.51) — уже хотя бы потому, что (как будет ясно из дальнейшего) кулоновский логарифм L уменьшается с уменьшением v . При кулоновском торможении реальных ионных пучков максимальный контраст по значениям dE/dx в начале пробега и в пике Брэгга обычно не превышает фактора 4–6.

Ещё одна важная особенность кулоновского торможения касается искривления траектории быстрой частицы. Если такой частицей является ион с массой m_1 , который тормозится преимущественно на электронах среды с массой $m_2 = m_e \ll m_1$, то его траектория вплоть до самой остановки с хорошей точностью является прямой: отклонение от прямолинейного движения в среднем составляет не более нескольких угловых градусов. Чтобы убедиться в этом, оценим нарастание угла отклонения θ от первоначального направления движения в процессе кулоновского торможения. Так как при $m_2 \ll m_1$ максимальный переданный импульс $q_{\max} = 2mv \approx 2m_2v$ много меньше импульса быстрого иона m_1v в \mathcal{L} -системе, то в одном акте рассеяния быстрый ион отклоняется на малый угол

$$\Delta\theta_1 \approx \frac{q}{m_1v} \ll 1. \quad (2.52)$$

Далее, поскольку парные столкновения статистически независимы, а отклонения в разные стороны равновероятны, то усреднённое по большому числу столкновений изменение угла $\langle \Delta\theta \rangle = 0$. При этом аддитивной по столкновениям величиной (как при всяком случайном блуждании) будет квадрат углового отклонения $\Delta\theta^2$, нарастание среднего значения которого вычисляется ана-

логично убыванию энергии,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\Delta\theta^2\rangle}{dx} &= n_2 \int (\Delta\theta_1)^2 d\sigma = n_2 \int_0^{q_{\max}} \left(\frac{q}{m_1 v}\right)^2 \frac{8\pi e_1^2 e_2^2 dq}{v^2 q^3} = \\ &= \frac{8\pi e_1^2 e_2^2}{m_1^2 v^4} n_2 L. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Разделив формулу (2.53) на (2.51), в нерелятивистском случае, когда $E = \frac{1}{2}m_1 v^2$, получаем простое уравнение

$$\frac{d\langle\Delta\theta^2\rangle}{dE} = -\frac{m_2}{m_1} \frac{1}{E}. \quad (2.54)$$

Интегрируя (2.54), находим, что в процессе замедления быстрого иона от энергии E_0 до энергии $E_1 < E_0$, среднеквадратичное отклонение от первоначального направления движения составит

$$\sqrt{\langle\Delta\theta^2\rangle} = \left(\frac{m_2}{m_1} \ln \frac{E_0}{E_1}\right)^{1/2}. \quad (2.55)$$

Подставив $m_1/m_2 = 1836$ и $E_0/E_1 = 10$ в (2.55), убеждаемся, что даже наиболее лёгкие ионы — протоны, потеряв в столкновениях с электронами 90 % своей энергии, отклоняются от первоначального направления движения всего лишь на 2° .

Подобно тому, как в процессе кулоновского торможения у быстрого заряда появляется описанный выше статистический разброс по углу θ , у него появляется и статистический разброс по энергии E . Как было показано Н. Бором [24], в нерелятивистском случае рост среднего квадрата разброса по энергии описывается выражением

$$\frac{d\langle\Delta E^2\rangle}{dx} = 4\pi e_1^2 e_2^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 n_2. \quad (2.56)$$

Отметим, что в отличие от (2.51) и (2.53), формула (2.56) не содержит кулоновского логарифма L . Подобно разбросу по углам,

статистический разброс по энергии всегда относительно мал при торможении тяжёлых ионов на лёгких электронах. Действительно, деля (2.56) на (2.51) и интегрируя, находим, что при полном замедлении нерелятивистского иона от начальной энергии E_0 суммарный накопленный разброс по энергии составляет

$$\sqrt{\langle \Delta E^2 \rangle} = \left(\frac{m_2}{m_1 L} \right)^{1/2} E_0 \ll E_0. \quad (2.57)$$

Заметим, однако, что при замедлении от больших начальных энергий E_0 в десятки и сотни МэВ/нуклон накопленный статистический разброс по энергии уже не мал по сравнению с “естественной” шириной пика Брэгга (т.е. с шириной максимума зависимости эффективного торможения $S(E)$ от энергии иона E). Как следствие, этот статистический разброс приводит к существенному увеличению ширины и снижению высоты пика Брэгга на профиле энерговклада ионного пучка вдоль его траектории.

Относительный малый статистический разброс по углам и энергиям при кулоновском торможении быстрых ионов позволяет с хорошей точностью считать полный кулоновский пробег таких ионов не статистической, а детерминированной величиной. Другими словами, в отличие от *эффективного пробега*

$$\langle l \rangle = \frac{E_0}{n_2 S(E_0)} = E_0 \left| \frac{dE}{dx} \right|_{E=E_0}^{-1} \quad (2.58)$$

иона с начальной энергией $E = E_0$, мы можем определить его *фактический пробег*

$$l = l(E_0) = \int_0^{E_0} \frac{dE}{n_2 S(E)}, \quad (2.59)$$

и с точностью порядка нескольких процентов считать, что все ионы с начальной энергией E_0 останавливаются на одном и том же расстоянии $l(E_0)$ от места рождения и имеют один и тот

же детерминированный профиль энерговыведения вдоль своей прямолинейной траектории. В этом отношении кулоновское торможение быстрых ионов кардинально отличается от замедления быстрых нейтронов при ядерном рассеянии, для которых статистический разброс по углам, энергиям и длине пробега всегда велик, и введение фактического пробега (2.59) физического смысла не имеет. На практике отличия между эффективным и фактическим пробегами при кулоновском торможении могут достигать множителя 2. Последнее обстоятельство легче всего продемонстрировать, положив

$$S(E) = S(E_0) \left(\frac{E}{E_0} \right)^n \quad (2.60)$$

и заметив, что в практически интересных случаях $-1 \leq n \leq \frac{1}{2}$. Подставляя (2.60) в (2.59), получаем

$$l = \frac{\langle l \rangle}{1 - n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \langle l \rangle, & n = -1, \\ 2 \langle l \rangle, & n = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.61)$$

2.6 Формула Бора

2.6.1 Модель Бора

Кулоновская расходимость, с которой мы столкнулись при попытке вычислить эффективное торможение S , обязана своим происхождением относительно слабому убыванию силы электростатического взаимодействия с расстоянием. Для слабо убывающего потенциала взаимодействия модель независимых парных столкновений со свободными зарядами среды является чересчур упрощённой идеализацией. Ясно, что на достаточно больших расстояниях от быстрого заряда взаимодействие, связывающее электроны среды в атомы, будет сильнее, чем их взаимодействие с пролетающим зарядом. Можно сразу предположить, что

учёт этой связи должен устранить кулоновскую расходимость. Что это действительно так, было показано Нильсом Бором в его знаменитой работе 1913 года [23], где он в рамках классической механики впервые правильно вычислил значение кулоновского логарифма L для нерелятивистских заряженных частиц.

Бор рассмотрел торможение быстрой заряженной частицы в неупорядоченной среде (газе, жидкости), состоящей из нейтральных атомов. В качестве полевых частиц он учёл только лёгкие электроны с массой $m_2 = m_e$ и зарядом $e_2 = -e$. В этом случае основным фактором, ограничивающим применимость чисто кулоновского рассеяния при малых переданных импульсах (больших прицельных параметрах), является эффект связи электрона в атоме. Поскольку квантовой теории атома в то время ещё не было, Бор предположил, что каждый связанный электрон входит в состав гармонического осциллятора с частотой собственных колебаний ω .

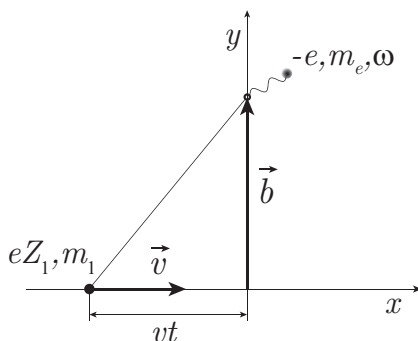


Рис. 2.5. Столкновение иона eZ_1, m_1 , летящего со скоростью \vec{v} , с электроном $-e, m_e$, связанным в гармоническом осцилляторе с собственной частотой ω

Выражаясь точнее, в модели Бора рассматриваются независимые парные столкновения быстрого точечного заряда $e_1 = eZ_1$ с электронами среды, каждый из которых находится в

потенциале гармонического осциллятора с собственной частотой ω (рис. 2.5). Предполагается, что центр каждого осциллятора фиксирован в пространстве (т.е. ассоциирован с тяжёлым неподвижным ядром атома среды), и электрон до столкновения покоится в этом центре, имея нулевую начальную энергию. Распределение положений осцилляторов в пространстве предполагается абсолютно случайным. Как и ранее в разделе 2.3, каждый акт столкновения характеризуется прицельным параметром \vec{b} , который, однако, теперь равен расстоянию не самого электрона, а центра его осцилляторной потенциальной ямы до первоначальной (невозмущённой) траектории быстрого заряда.

В дополнение к вышесказанному для простоты предположим также, что быстрый заряд является тяжёлой частицей (ионом) с массой $m_1 \gg m_e$ (хотя для вывода формулы Бора это, вообще говоря, не требуется). В этом случае приведённая масса сталкивающихся частиц $m = m_2 = m_e$, и, как нетрудно понять, масса иона m_1 не войдёт ни в выражение для переданной в одном столкновении энергии ΔE_1 , ни в окончательные формулы для S и L . Отметим, что при $m_1 \gg m_e$ употребление введённого выше прицельного параметра \vec{b} вполне оправдано и при квантовом описании движения электрона, поскольку b есть прицельное расстояние между тяжёлыми ядерными частицами, длину волны де Бройля которых можно считать бесконечно малой по сравнению с соответствующей длиной волны электрона. Следуя оригинальной работе Бора, все вычисления в данном разделе проведём в нерелятивистском пределе $v \ll c$.

Параметрический анализ сформулированной таким образом модели Бора показывает, что эффективное торможение S должно быть функцией только четырёх размерных параметров, а именно,

$$e_1 e_2, \quad m_e, \quad v, \quad \omega, \quad (2.62)$$

а безразмерная величина L может, естественно, быть функцией лишь безразмерных комбинаций этих четырёх параметров. Поскольку четыре размерных параметра (2.62) имеют три неза-

висимых размерности, из них можно сформировать лишь одну независимую безразмерную комбинацию. Мы выберем эту комбинацию следующим образом.

Прежде всего исключим из четырёх параметров (2.62) скорость быстрого иона v . Из оставшихся трёх можно сформировать лишь одну комбинацию с размерностью скорости, а именно

$$v_s = \left(\frac{|e_1 e_2| \omega}{m_e} \right)^{1/3} = \left(\frac{|Z_1| e^2 \omega}{m_e} \right)^{1/3}. \quad (2.63)$$

Имея в своём распоряжении характерную скорость v_s , которая не зависит от скорости иона v , мы можем ввести безразмерную скорость

$$\bar{v} = \frac{v}{v_s}. \quad (2.64)$$

В результате приходим к выводу, что кулоновский логарифм в модели Бора должен быть функцией лишь одной безразмерной переменной \bar{v} .

Здесь необходимо сделать оговорку. В общем случае коэффициент торможения зависит от знака произведения зарядов $e_1 e_2$ (эффект Баркаса—Андерсена), т.е. значения $L(\bar{v})$ при одном и том же \bar{v} будут разными для $e_1 e_2 > 0$ и $e_1 e_2 < 0$. В обозначениях данного параграфа случай $e_1 e_2 > 0$ формально реализуется при $Z_1 < 0$, т.е., скажем, для антипротонов нужно положить $Z_1 = -1$. А тогда, определив \bar{v} согласно (2.63), (2.64), мы должны различать две функции, а именно, $L_+(\bar{v})$ для $e_1 e_2 > 0$ (кулоновское отталкивание) и $L_-(\bar{v})$ для $e_1 e_2 < 0$ (кулоновское притяжение). Формула Бора, как будет видно ниже, даёт не зависящий от знака взаимодействия результат $L(\bar{v}) = L_+(\bar{v}) = L_-(\bar{v})$.

В модели Бора значения $L_{\pm}(\bar{v})$ конечны и могут быть в принципе вычислены при любых конечных значениях параметров, перечисленных в (2.62). Однако простая аналитическая формула для $L_{\pm}(\bar{v})$ получается лишь в пределе высоких скоростей $\bar{v} \gg 1$. Другими словами, чтобы вывести свою формулу, Бор сделал до-

полнительное (к уже сформулированной модели) предположение

$$v \gg v_s. \quad (2.65)$$

Именно это условие даёт математическое определение того, что в модели Бора понимается под быстрой частицей.

2.6.2 Вывод нерелятивистской формулы Бора

Наряду с характерной скоростью v_s , в модели Бора есть два независимых характерных значения прицельного параметра b ,

$$b_0 = \frac{|Z_1|e^2}{m_e v^2} \quad \text{и} \quad b_{ad} = \frac{v}{\omega}, \quad (2.66)$$

которые естественным образом образуются из четырёх основных размерных параметров модели (2.62). Значение $b = b_0$ соответствует повороту импульса на 90° в \mathcal{U} -системе при свободном кулоновском рассеянии, а $b = b_{ad}$ — адиабатический прицельный параметр, на котором характерное время столкновения b/v сравнивается с обратной частотой электронного осциллятора ω^{-1} . Интуитивно понятно, что в столкновениях с $b \gg b_{ad}$ передача энергии связанному электрону должна быть сильно подавлена.

Легко убедиться, что условие $v \gg v_s$ эквивалентно неравенству $b_0 \ll b_{ad}$, которое позволяет ввести некоторое промежуточное значение прицельного параметра b_1 , удовлетворяющее соотношению

$$b_0 \ll b_1 \ll b_{ad}. \quad (2.67)$$

Как будет видно в дальнейшем, конкретное значение b_1 неважно, поскольку оно выпадает из окончательного ответа. Введя b_1 , можем разбить общее выражение (2.22) для эффективного торможения S на сумму двух интегралов

$$S = S_A + S_B = 2\pi \int_0^{b_1} |\Delta E_1| b db + 2\pi \int_{b_1}^{\infty} |\Delta E_1| b db, \quad (2.68)$$

и использовать при их вычислении дополнительные упрощающие предположения. Эти предположения будут разными для двух областей интегрирования, но каждое из них будет асимптотически точным в своей области.

Для близких столкновений с $b < b_1$, когда $b/v \ll \omega^{-1}$ и столкновение происходит очень быстро по сравнению с периодом собственных колебаний электрона, можно пренебречь связью электрона в осцилляторе и считать его свободной частицей. В этом случае передача энергии в одном столкновении ΔE_1 определяется полученным ранее выражением (2.49), и для первого слагаемого в правой части (2.68) сразу получаем

$$S_A = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \int_0^{b_1} \frac{b db}{b^2 + b_0^2} = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^2 \right]. \quad (2.69)$$

Чтобы убедиться, что при $b < b_1$ можно действительно пренебречь связью электрона, достаточно проверить выполнение неравенства

$$|\Delta E_1| \gg |\Delta U| = \frac{1}{2} m_e \omega^2 r_e^2, \quad (2.70)$$

где ΔU — изменение потенциальной энергии электрона в осцилляторе в результате его смещения от начального положения равновесия на величину r_e . Оценивая смещение электрона за время столкновения $t_c = b/v$ по простой формуле $r_e \simeq Ft_c^2/m_e = b_0$, где $F = |Z_1|e^2/b^2$ — сила Кулона в момент максимального сближения, находим, что неравенство (2.70) эквивалентно неравенству $b_0^2 + b^2 \ll b_{ad}^2$, выполнение которого при $b < b_1$ гарантировано условием (2.67).

Перейдём к вычислению эффективного торможения S_B для далёких столкновений с $b > b_1$. В этом случае нельзя пренебрегать связью электрона в осцилляторе. Но поскольку теперь характерное смещение электрона за время столкновения $r_e \lesssim b_0 \ll b$, можно сделать другое упрощающее предположение, а именно, что сила Кулона, действующая со стороны быстрого

иона на электрон, не зависит от смещения электрона в процессе столкновения и является функцией только времени t . Это упрощающее предположение принято называть дипольным приближением. Выбирая систему отсчёта таким же образом, как и в параграфе 2.3 (см. рис. 2.5), мы видим, что необходимо рассчитать движение связанного электрона под действием переменной внешней силы $\vec{F}(t)$ с компонентами

$$F_x(t) = Z_1 e^2 \frac{vt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}}, \quad (2.71a)$$

$$F_y(t) = -Z_1 e^2 \frac{b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (2.71b)$$

Значения $\vec{F}(t)$ вычислены в точке $(x, y) = (0, b)$, где находится неподвижный центр осциллятора.

Пусть $\vec{r}_e(t)$ — вектор смещения электрона относительно центра осциллятора. Тогда уравнение движения электрона имеет вид

$$\ddot{\vec{r}}_e + \omega^2 \vec{r}_e = \frac{1}{m_e} \vec{F}(t), \quad (2.72)$$

где точка над символом означает дифференцирование по времени. Общее решение этого уравнения хорошо известно из курса механики. Следуя методу из [20, §22], введём новую комплексную переменную $\vec{s} = \dot{\vec{r}}_e + i\omega \vec{r}_e$, что позволяет нам свести (2.72) к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\dot{\vec{s}} - i\omega \vec{s} = \frac{1}{m_e} \vec{F}(t). \quad (2.73)$$

Решение этого уравнения при начальных условиях $\vec{r}_e(-\infty) = \dot{\vec{r}}_e(-\infty) = 0$ имеет вид

$$\vec{s}(t) = \frac{1}{m_e} \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^t \vec{F}(t') \exp(-i\omega t') dt'. \quad (2.74)$$

Полная энергия электрона $E_e(t)$, равная сумме кинетической и потенциальной составляющих, довольно просто выражается через комплексную переменную \vec{s} :

$$E_e(t) = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}_{ex}^2 + \omega^2 r_{ex}^2 + \dot{r}_{ey}^2 + \omega^2 r_{ey}^2) = \frac{1}{2} m_e (|s_x|^2 + |s_y|^2). \quad (2.75)$$

Поскольку быстрый ион теряет ровно столько энергии, сколько приобретает электрон, из (2.74), (2.75) и (2.71) получаем следующую формулу для изменения энергии иона в одном столкновении:

$$\begin{aligned} -\Delta E_1 &= E_e(+\infty) - E_e(-\infty) = \\ &= \frac{1}{2m_e} \left(\left| \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2 + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F_y(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2 \right) = \\ &= \frac{2Z_1^2 e^4}{m_e v^2 b^2} \left\{ \left[\int_0^{\infty} \frac{\tau \sin(\bar{b}\tau)}{(1 + \tau^2)^{3/2}} d\tau \right]^2 + \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos(\bar{b}\tau)}{(1 + \tau^2)^{3/2}} d\tau \right]^2 \right\}, \quad (2.76) \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\bar{b} = \frac{b}{b_{ad}} = \frac{b\omega}{v}. \quad (2.77)$$

Стоящие в (2.76) интегралы выражаются через модифицированные функции Бесселя (функции Макдональда) $K_0(z)$ и $K_1(z) = -dK_0/dz$ [30],

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau \sin(\bar{b}\tau)}{(1 + \tau^2)^{3/2}} d\tau = \bar{b} K_0(\bar{b}), \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(\bar{b}\tau)}{(1 + \tau^2)^{3/2}} d\tau = \bar{b} K_1(\bar{b}). \quad (2.78)$$

Функции $K_0(z)$ и $K_1(z)$ монотонно убывают на всей действительной оси $0 < z < \infty$ и имеют следующие асимптотические

разложения:

$$K_0(z) = \begin{cases} -\gamma_E - \ln \frac{z}{2}, & z \ll 1, \\ \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} \exp(-z), & z \gg 1, \end{cases} \quad (2.79)$$

$$K_1(z) = \begin{cases} z^{-1}, & z \ll 1, \\ \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} \exp(-z), & z \gg 1, \end{cases} \quad (2.80)$$

где $\gamma_E = 0.5772\dots$ — постоянная Эйлера. Подставляя (2.78) в (2.76), получаем следующее выражение для передачи энергии в одном столкновении с прицельным параметром $b > b_1$:

$$\Delta E_1(b) = -\frac{2Z_1^2 e^4}{m_e v^2 b^2} [K_0^2(\bar{b}) + K_1^2(\bar{b})] \bar{b}^2. \quad (2.81)$$

Экспоненциальное убывание функций $K_0(\bar{b})$ и $K_1(\bar{b})$ при $\bar{b} \gg 1$ означает, что потери энергии быстрого иона в столкновениях с $b > b_{ad}$ экспоненциально малы. Сразу ясно, что это обстоятельство устраняет кулоновскую расходимость при $b \rightarrow \infty$. В противоположном пределе $\bar{b} \ll 1$ имеем $\bar{b}^2 K_0^2(\bar{b}) \rightarrow 0$, $\bar{b}^2 K_1^2(\bar{b}) \rightarrow 1$, и формула (2.81) переходит в выражение (2.28), полученное ранее в приближении быстрого пролёта. Это вполне естественно, поскольку как приближение быстрого пролёта, так и дипольное приближение основаны на пренебрежении смещением электрона в процессе столкновения. Нетрудно также убедиться, что при выполнении условия (2.67) формулы (2.81) и (2.49), использованные соответственно при $b > b_1$ и $b < b_1$, асимптотически точно сшиваются при $b = b_1$.

Теперь, чтобы найти второе слагаемое S_B в (2.68), следует проинтегрировать (2.81) по области прицельных параметров $b_1 < b < \infty$. Воспользовавшись соответствующим табличным ин-

тегралом для функций $K_\nu(z)$ [31], находим

$$S_B = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \int_{\bar{b}_1}^{\infty} z [K_0^2(z) + K_1^2(z)] dz = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \bar{b}_1 K_0(\bar{b}_1) K_1(\bar{b}_1), \quad (2.82)$$

где

$$\bar{b}_1 = \frac{b_1}{b_{ad}} = \frac{b_1 \omega}{v}. \quad (2.83)$$

Складывая S_A из (2.69) с S_B из (2.82), ещё раз вспомним условие (2.67) и удержим лишь первые члены

$$\frac{1}{2} \ln [1 + (b_1/b_0)^2] \approx \ln(b_1/b_0), \quad \bar{b}_1 K_0(\bar{b}_1) K_1(\bar{b}_1) \approx -\gamma_E + \ln(2/\bar{b}_1) \quad (2.84)$$

в асимптотическом разложении по малым параметрам $b_0/b_1 \ll 1$ и $\bar{b}_1 = b_1/b_{ad} \ll 1$. Сразу видно, что при сложении этих членов промежуточный параметр b_1 выпадает из ответа. В результате, переходя к тормозной способности, получаем известную формулу Бора [23]

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} n_e \ln \left(C_B \frac{m_e v^3}{|Z_1| e^2 \omega} \right), \quad (2.85)$$

где постоянная

$$C_B = \frac{2}{\exp(\gamma_E)} = 1.1229 \dots \quad (2.86)$$

Подчеркнём, что в полученной Бором формуле для кулоновского логарифма,

$$L = L_{Bohr} = \ln \left(1.123 \frac{m_e v^3}{|Z_1| e^2 \omega} \right) = \ln (1.123 \bar{v}^3), \quad (2.87)$$

стоит именно абсолютная величина произведения зарядов $|e_1 e_2| = |Z_1| e^2$, т.е. кулоновское торможение по формуле Бора не зависит от того, притягивает быстрый ион электроны среды или

отталкивает. Если формулу (2.87) представить в традиционном виде $L = \ln(b_{\max}/b_0)$, то можно сказать, что вычисленное Бором значение максимального прицельного параметра составляет $b_{\max} = 1.123b_{ad} = 1.123(v/\omega)$.

Формула (2.85) получена для нерелятивистских быстрых ионов с $v \ll c$. В релятивистском случае, как можно догадаться из результатов параграфа 2.3, возникают поправки лишь к кулоновскому логарифму, который при $\gamma \ll m_1/m_e$ даётся выражением

$$L = \ln \left(1.123 \frac{m_e v^3}{|Z_1| e^2 \omega} \gamma^2 \right) - \frac{1}{2} \beta^2, \quad (2.88)$$

где $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Релятивистский вариант формулы Бора (2.88) не имеет особого практического значения, поскольку, как станет ясно из дальнейшего, при больших скоростях квантовые поправки к формуле Бора важнее релятивистских.

2.6.3 Предел низких скоростей $v \lesssim v_s$

Приведённый выше вывод формулы Бора (2.85) ясно показывает, что она представляет собой первый член асимптотического разложения тормозной способности в модели Бора при $\bar{v} \gg 1$. При $\bar{v} \lesssim 1$ формула (2.85) становится неприменимой, но в самой модели Бора ничего плохого не происходит. Возникает естественный вопрос: как ведёт себя тормозная способность в модели Бора при умеренных и низких скоростях быстрого заряда $v \lesssim v_s$? Достаточно полный ответ на этот вопрос был получен лишь недавно в работе [32].

Прежде всего можно вычислить следующий член асимптотического разложения по $\bar{v} \gg 1$. Результат такого вычисления имеет вид [29]

$$L_{\pm}(\bar{v}) = \ln(C_B \bar{v}^3) \mp \frac{3\pi}{2} \bar{v}^{-3} \ln(C_A \bar{v}^3), \quad (2.89)$$

где $C_A \approx 0.325$ [32]. Согласно этому результату $L_-(\bar{v}) > L_+(\bar{v})$, и относительное различие между ними есть величина $\sim \bar{v}^{-3}$.

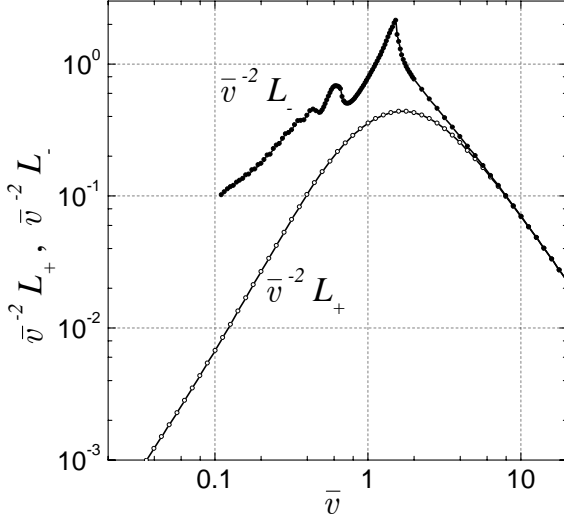


Рис. 2.6. Зависимость эффективного торможения $S_{\pm}(\bar{v}) \propto \bar{v}^{-2} L_{\pm}(\bar{v})$ от скорости быстрого заряда $\bar{v} = v/v_s$ в модели Бора при $\bar{v} \lesssim 10$. Приведены графики рассчитанных численно безразмерных функций $\bar{v}^{-2} L_{+}(\bar{v})$ и $\bar{v}^{-2} L_{-}(\bar{v})$

На рис. 2.6 показаны графики функций $\bar{v}^{-2} L_{\pm}(\bar{v})$, полученные путём численного решения классических уравнений движения электрона в модели Бора [32]. Поведение этих функций отражает зависимость эффективного торможения S_{\pm} от скорости быстрого заряда. Хорошо видно, что при $\bar{v} \simeq 1$ эффект Баркаса—Андерсена составляет уже около 100 %. Аналитическими методами удаётся доказать, что при $\bar{v} \ll 1$ эффективное торможение $S_{+}(\bar{v})$ в случае отталкивания обращается в нуль по закону $S_{+}(\bar{v}) \propto \bar{v}^{5/3}$. Функция же $S_{-}(\bar{v})$ при $\bar{v} \lesssim 1$ обнаруживает квазирезонансное поведение (из-за временного захвата полевого электрона пролетающим зарядом); закон её убывания при $\bar{v} \rightarrow 0$ остаётся неизвестным.

2.7 Формулы Бете и Блоха

Бор вывел формулу (2.85) в рамках чисто классической физики XIX века. Рождение квантовой механики поставило под сомнение справедливость (или применимость) многих классических формул, в том числе и формулы Бора для торможения заряженных частиц. В 1928 г. Мотт и Гордон (N.F. Mott and W. Gordon) строго доказали, что для рассеяния на кулоновском потенциале нерелятивистская квантовая механика чудесным образом даёт тот же самый ответ, что и классическая механика, а именно, формулу Резерфорда. Последнее, как это следует из доводов параграфа 2.4, означает, что квантовая теория не может изменить предлогарифмический множитель в формуле Бора. Однако, поскольку вычисление кулоновского логарифма L базируется на конкретной модели атома (классический гармонический осциллятор в модели Бора), было бы странно, если бы правильное квантово-механическое выражение для L совсем не содержало постоянной Планка \hbar .

Действительно, в 1930 г. Г. Бете (H. Bethe) опубликовал полученную им квантовую формулу для L [25], которая существенно отличалась от классического результата (2.87) и содержала постоянную \hbar . Но поскольку вычисления Бете были выполнены в первом борновском приближении, область применимости которого ограничена, некоторое время оставалось неясным, в каком отношении друг к другу находятся результаты Бора и Бете. Окончательную ясность внесла работа Ф. Блоха (F. Bloch) [33], который провёл строгие квантовые вычисления и показал, как в зависимости от значения безразмерного параметра

$$\alpha_v = \frac{|e_1 e_2|}{\hbar v} = \frac{|Z_1| e^2}{\hbar v} \quad (2.90)$$

из полной квантовой формулы (формулы Блоха) в качестве двух предельных случаев получаются либо формула Бора (предел $\alpha_v \gg 1$), либо формула Бете (предел $\alpha_v \ll 1$). Здесь приведём качественный вывод квантовой формулы для кулоновского тормо-

жения, позволяющий воспроизвести результаты Блоха с точностью до численного множителя порядка единицы под логарифмом. Как и при выводе формулы Бора, ограничимся частным случаем тяжелой быстрой частицы с $m_1 \gg m_e$, когда приведённая масса в столкновениях с электронами $m = m_e$.

С точки зрения современной квантовой механики, исходная модель Бора имеет два изъяна: 1) движение электрона в осцилляторе должно подчиняться не классическим, а квантовым законам, и 2) реальные атомы устроены сложнее, чем гармонический осциллятор. Мы избавимся от этих дефектов по очереди, т.е. сначала получим формулу для кулоновского торможения на электронах в квантовых осцилляторах с собственной частотой ω , а затем обобщим полученный результат на реальные атомы. При этом из теории гармонического квантового осциллятора нам понадобится лишь хорошо известный факт, что минимальная порция энергии, которая может быть передана связанному электрону, составляет $\hbar\omega$, а движение электрона в квантовом осцилляторе с полной энергией $E_e \gg \hbar\omega$ является квазиклассическим. Как уже отмечалось в параграфе 2.6.1, квантово-механическое рассмотрение вполне допускает использование прицельного параметра b при условии, что он измерен не до электрона, а до неподвижного центра осциллятора. Необходимо только иметь в виду, что теперь передача энергии $|\Delta E_1(b)|$ в одном столкновении с прицельным расстоянием b будет иметь дискретный набор значений $0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, \dots$, распределённых по определённому вероятностному закону.

Нетрудно понять, что при достаточно высоких скоростях быстрого заряда в квантовом (точно так же, как и в классическом) случае существует широкий диапазон прицельных параметров (или переданных импульсов), где связью электрона в квантовом осцилляторе можно пренебречь. При этом, наряду с классическим условием $v \gg v_s$, для квантового осциллятора необходимо потребовать выполнения дополнительного неравенства $m_e v^2 \gg \hbar\omega$. А тогда, поскольку квантовое рассеяние на

кулоновском потенциале описывается всё той же формулой Резерфорда (2.44), получаем всё ту же формулу для тормозной способности

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} n_e L, \quad (2.91)$$

где кулоновский логарифм формально определяется выражением

$$L = \ln \frac{q_{\max}}{q_{\min}} = \ln \frac{2m_e v}{q_{\min}}. \quad (2.92)$$

Когда происходит рассеяние на связанном электроне, переданный импульс $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}'_1$ определяется как разность между значениями импульса быстрой частицы $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}$ и \vec{p}'_1 соответственно до и после столкновения. При этом импульс связанного полевого электрона после столкновения уже не обязан быть равным \vec{q} , поскольку переданный импульс распределяется между лёгким электроном и тяжёлым атомным ядром в центре осциллятора. Максимальная величина переданного импульса $q_{\max} = 2m_e v$ достигается в пределе, когда связью электрона в осцилляторе можно пренебречь. Физический смысл минимального переданного импульса q_{\min} состоит в том, что столкновения с $q < q_{\min}$ уже нельзя описывать дифференциальным сечением Резерфорда из-за того, что полевой электрон связан в осцилляторе. Наша задача состоит в том, чтобы определить q_{\min} .

В классической модели Бора логика определения q_{\min} достаточно проста. Для электрона в осцилляторе существует адиабатическое значение прицельного параметра $b = b_{ad} = v/\omega$. В адиабатическом пределе при $b \gg b_{ad}$ передача энергии связанному электрону экспоненциально мала, поскольку определяется свёрткой быстро осциллирующих функций $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ с медленно меняющейся внешней силой [см. (2.76)]. При $b \ll b_{ad}$ электрон можно считать свободным и применять формулу Резерфорда. В результате, q_{\min} есть передача импульса при $b = b_{ad}$. Поскольку при $v \gg v_s$ мы имеем $b_{ad} \gg b_0$, можно воспользоваться

ся формулой (2.27) и найти

$$q_{\min,cl} = \frac{2|Z_1|e^2}{b_{adv}} = \frac{2|Z_1|e^2\omega}{v^2}. \quad (2.93)$$

Подставляя (2.93) в (2.92), с точностью до множителя 1.123 под логарифмом получаем результат Бора (2.87).

В квантовом случае сохраняют свой смысл как понятие адиабатичности возмущения [11, §41], так и адиабатическое значение прицельного параметра $b_{ad} = v/\omega$. Тем не менее, приведённое выше рассуждение становится несостоятельным, поскольку неравенство $b \ll b_{ad}$ отнюдь не означает, что для оценки q можно использовать классическую формулу (2.27) — уже хотя бы потому, что соответствующее значение $|\Delta E_1|$ из (2.28) может оказаться меньше $\hbar\omega$. Другими словами, условие $b \ll b_{ad}$ уже не означает, что электрон в квантовом осцилляторе можно считать свободным, поскольку передача энергии может быть подавлена дополнительным условием того, что существует минимальная порция переданной энергии, равная $\hbar\omega$.

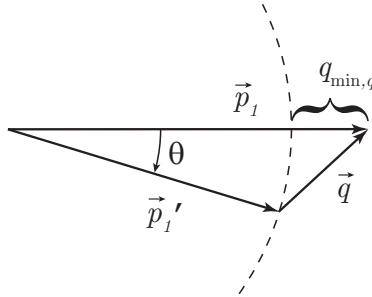


Рис. 2.7. Импульсная диаграмма рассеяния быстрого заряда с начальным импульсом \vec{p}_1 на электроне, связанном в квантовом осцилляторе. Если электрон поглощает минимально возможную порцию энергии $\hbar\omega$, начало вектора \vec{q} лежит на показанной пунктиром окружности радиусом $(p_1^2 - 2m_1\hbar\omega)^{1/2}$

С другой стороны, известно, что в квантовой механике строго

выполняется закон сохранения энергии, который для рассматриваемого столкновения имеет вид

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} = \frac{(\vec{p}'_1)^2}{2m_1} + n\hbar\omega, \quad (2.94)$$

где $n = 1, 2, \dots$. Легко установить, что минимальное значение $q = |\vec{p}_1 - \vec{p}'_1|$ достигается при $n = 1$, когда векторы \vec{p}_1 и \vec{p}'_1 коллинеарны и направлены в одну сторону. Это становится очевидно, если рассмотреть импульсную диаграмму рассеяния (рис. 2.7), на которой при $n = 1$ в силу (2.94) начало вектора \vec{q} должно лежать на окружности радиусом $(p_1^2 - 2m_1\hbar\omega)^{1/2}$ с центром в начале вектора \vec{p}_1 , а конец — на конце вектора \vec{p}_1 . Подставляя $p_1 = m_1v$ и учитывая, что в силу сделанных выше предположений $\hbar\omega \ll m_e v^2 \ll m_1 v^2$, легко находим минимальный переданный импульс в случае квантового осциллятора:

$$q_{\min,q} = p_1 - (p_1^2 - 2m_1\hbar\omega)^{1/2} = \frac{\hbar\omega}{v}. \quad (2.95)$$

Если теперь подставим (2.95) вместо q_{\min} в (2.92), то получим выражение для кулоновского логарифма

$$L = L_{Bethe} = \ln \frac{2m_e v^2}{\hbar\omega}, \quad (2.96)$$

которое в точности совпадает с формулой Бете, включая численный множитель под знаком логарифма.

Однако при более пристальном рассмотрении легко понять, что замена q_{\min} в (2.92) на $q_{\min,q}$ из (2.95) не вполне правомерна, так как, строго говоря, эти две величины имеют разный физический смысл. Действительно, $q_{\min,q}$ есть абсолютная нижняя граница переданного импульса, т.е. во всех случаях, когда происходит переход полевого электрона в состояние с более высокой энергией, имеем $q \geq q_{\min,q}$. В то же время, q_{\min} в (2.92) есть минимальный переданный импульс, ниже которого отказывает приближение рассеяния на свободном электроном и нельзя использовать формулу Резерфорда. А формула Резерфорда может

оказаться неприменимой задолго до того, как величина q опустится до значения $q_{\min,q}$. Другими словами, если бы из неравенства $q > q_{\min,q}$ всегда следовало, что можно использовать сечение Резерфорда для рассеяния на свободных электронах, то мы должны были бы забыть про формулу Бора (2.87) и всегда (когда $L \gg 1$) применять квантовую формулу Бете (2.96). В действительности, как мы сейчас убедимся, если реализуется случай $q_{\min,q} < q_{\min,cl}$, формулой Резерфорда можно пользоваться лишь при $q > q_{\min,cl}$, но не в интервале $q_{\min,q} \leq q < q_{\min,cl}$ (рис. 2.8).

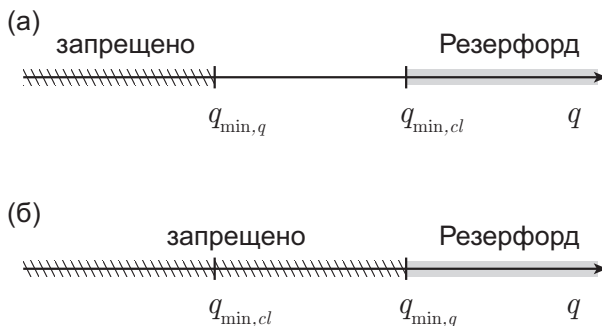


Рис. 2.8. Два случая взаимного соотношения между $q_{\min,q}$ и $q_{\min,cl}$. В случае (а) $q_{\min} = q_{\min,cl}$, тогда как в случае (б) $q_{\min} = q_{\min,q}$. Значения переданного импульса в диапазоне $0 < q < q_{\min,q}$ запрещены законами квантовой механики

Рассмотрим более подробно ситуацию, когда $q_{\min,q} \ll q_{\min,cl}$ (см. рис. 2.8а). В этом случае параметр $\alpha_v = q_{\min,cl}/2q_{\min,q} \gg 1$, и, согласно общему критерию [11, §49], мы вправе анализировать рассеяние на кулоновском потенциале в рамках классической механики. Результат такого анализа известен: резерфордовское сечение рассеяния можно применять в интервале переданных импульсов $2m_e v \geq q > q_{\min,cl}$. Понятно, что появление дополнительного ограничения $q > q_{\min,q}$, где $q_{\min,q} \ll q_{\min,cl}$ в этом случае ничего не меняет: в качестве минимального переданного импульса q_{\min} в формуле (2.92) необходимо, конечно же, использовать

$q_{\min,cl}$.

В обратном предельном случае $q_{\min,q} \gg q_{\min,cl}$ (см. рис. 2.8б) значения $q < q_{\min,q}$ запрещены законами поведения квантового осциллятора, и это, конечно же, означает, что при $q < q_{\min,q}$ нельзя использовать и сечение Резерфорда. Тем самым, приходим к выводу, что при $q_{\min,q} \gg q_{\min,cl}$ минимальный переданный импульс $q_{\min} \gtrsim q_{\min,q}$. То, что он по порядку величины именно совпадает с $q_{\min,q}$, можно обосновать с помощью следующего аргумента. Столкновения с $q \gg q_{\min,q}$ в среднем сопровождаются относительно большими значениями переданной энергии $|\Delta E_1| \gg \hbar\omega$, при которых различие между квантовым и классическим осциллятором стирается, а для классического осциллятора, как известно, достаточно уже более слабого условия $q \gg q_{\min,cl}$, чтобы можно было пренебречь связью полевого электрона и применить сечение Резерфорда для рассеяния на свободном заряде.

Изложенные рассуждения приводят к простому правилу оценки минимального переданного импульса q_{\min} в общей формуле (2.45) для кулоновского логарифма при торможении на электронах среды, связанных в квантовых осцилляторах: необходимо вычислить значения $q_{\min,cl}$ и $q_{\min,q}$, а затем выбрать из них максимальное. На практике удобно использовать простую гладкую интерполяцию между двумя асимптотиками в виде

$$q_{\min} = \sqrt{q_{\min,cl}^2 + q_{\min,q}^2}, \quad q_{\min,cl} = 1.781 \frac{|Z_1|e^2\omega}{v^2}, \quad q_{\min,q} = \frac{\hbar\omega}{v}, \quad (2.97)$$

где коэффициент $\exp(\gamma_E) = 1.781 \dots$ обеспечивает точную шшивку с классической формулой Бора. По смыслу своего вывода формулы (2.45) и (2.97) применимы только тогда, когда они приводят к значениям L , достаточно большим по сравнению с единицей.

Из формулы (2.97) видно, что применимость классической и квантовой асимптотик контролируется безразмерным параметром α_v , определённым в (2.90), который с точностью до численного множителя равен отношению $q_{\min,cl}/q_{\min,q}$. При $\alpha_v \gg 1$ сле-

дует использовать классическую формулу Бора, а при $\alpha_v \ll 1$ — квантовую формулу Бете. Этот же параметр контролирует применимость классической механики к задаче о рассеянии на кулоновском потенциале [11, §49]. Строгое квантовомеханическое вычисление кулоновского логарифма L , справедливое при любых значениях α_v , было проведено Блохом [33]. С учётом релятивистских поправок при $1 \leq \gamma \ll m_1/m_e$ формула Блоха имеет вид

$$L_{Bloch} = \ln \left(\frac{2m_e v^2}{\hbar \omega} \gamma^2 \right) - \beta^2 - \phi_{Bl}(\alpha_v), \quad (2.98)$$

$$\phi_{Bl}(x) = \gamma_E + \operatorname{Re} \psi(1 + ix), \quad \psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz}, \quad (2.99)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма функция. Функцию $\phi_{Bl}(\alpha_v)$ обычно называют поправкой Блоха. Асимптотические разложение этой функции даётся выражениями

$$\phi_{Bl}(x) = \begin{cases} \zeta(3) \cdot x^2 - \zeta(5) \cdot x^4 + \dots, & x \ll 1, \\ \gamma_E + \ln x + \frac{1}{12x^2} + \dots, & x \gg 1, \end{cases} \quad (2.100)$$

где $\zeta(n)$ — дзета-функция Римана, $\zeta(3) = 1.202$. Подставляя (2.100) в (2.98), легко убеждаемся, что в пределе $\alpha_v \gg 1$ формула Блоха переходит в формулу Бора, а при $\alpha_v \ll 1$ — в формулу Бете. В нерелятивистском случае отличие строгой формулы (2.98) от значений L , посчитанных по формуле (2.45) с простой интерполяцией (2.97) для q_{\min} , нигде не превышает 0.05.

Разобравшись со случаем квантового осциллятора, обратимся к торможению на связанных электронах реальных атомов. Как и в теории Бора, при выполнении условий $v \gg v_s$, $m_e v^2 \gg \gg \hbar \omega$ эффект связи электронов в атоме достаточно учесть в дипольном приближении, предполагая, что возмущающее электрическое поле, создаваемое пролетающим зарядом, не зависит от координат электронов относительно центра атома; в этом случае возмущающий потенциал будет линейной функцией этих коорди-

нат. В общем случае каждый атом обладает определённым энергетическим спектром электронных возбуждений ϵ_n , куда входят состояния как дискретного, так и непрерывного участков спектра. Вероятность перехода электрона из основного состояния с энергией ϵ_1 в возбуждённое состояние с энергией ϵ_n в дипольном приближении пропорциональна квадрату модуля матричного элемента дипольного момента $-e\vec{r}$. Общепринятой безразмерной величиной, характеризующей вероятность дипольных переходов, является сила осциллятора, определённая как

$$f_{1n} = \frac{2m_e\omega_{1n}}{\hbar} |x_{1n}|^2 = \frac{2m_e\omega_{1n}}{\hbar} |y_{1n}|^2 = \frac{2m_e\omega_{1n}}{\hbar} |z_{1n}|^2, \quad (2.101)$$

где $\omega_{1n} = (\epsilon_n - \epsilon_1)/\hbar$ — частота перехода $1 \rightarrow n$, x_{1n} , y_{1n} , z_{1n} — соответствующие матричные элементы координат x , y , z [35, гл. 13]. Для сил осцилляторов f_{1n} выполняется правило сумм Томаса—Райхе—Куна

$$\sum_n f_{1n} = Z, \quad (2.102)$$

где Z — полное число связанных электронов в атоме. Здесь и ниже подразумевается, что суммирование по возбуждённым состояниям n включает также и интегрирование по непрерывному спектру электронных энергий.

В своих работах Бете и Блох показали, что в дипольном приближении вклад отдельного атома среды в кулоновскую тормозную способность определяется суммой

$$\sum_n f_{1n} \ln \frac{2m_e v^2}{\hbar\omega_{1n}}, \quad (2.103)$$

которая должна заменить выражение $\ln(2m_e v^2/\hbar\omega)$ в формуле для кулоновского торможения на гармонических осцилляторах с собственной частотой ω . Если теперь введём среднюю частоту атомных переходов $\langle\omega\rangle$, определённую соотношением

$$\ln\langle\omega\rangle = \frac{\sum_n f_{1n} \ln \omega_{1n}}{\sum_n f_{1n}}, \quad (2.104)$$

и учтём правило сумм (2.102), то придём к выводу, что для описания кулоновского торможения в среде, состоящей из реальных атомов, достаточно во всех формулах для кулоновского логарифма заменить частоту квантового осциллятора ω на среднюю атомную частоту $\langle\omega\rangle$. При этом в основной формуле (2.91) под n_e следует, конечно, понимать полное число всех связанных атомных электронов в единице объёма.

Как правило, вместо средней атомной частоты $\langle\omega\rangle$ употребляется величина $I = \hbar\langle\omega\rangle$, которую называют *средней энергией ионизации*. Первоначально Бете удалось вычислить значение I лишь для атома водорода, для которого (с учётом более поздних поправок [36]) $I = 1.102Ry = 15.0$ эВ; здесь $Ry = m_e e^4 / 2\hbar^2 = 13.6$ эВ. В последнее время появились численные расчёты значений I и для ряда других атомов и ионов. При практическом применении формул Бора—Бете—Блоха обычно используют эмпирические значения I . Полную таблицу эмпирических значений I для всех элементов и ряда соединений можно найти в обзоре [37].

2.8 Кулоновское торможение в плазме

2.8.1 Холодная плазма

Бор, Бете и Блох в своих работах показали, что кулоновская расходимость в скорости потерь энергии быстрыми заряженными частицами устраняется, если учесть, что в обычном веществе, состоящем из нейтральных атомов, электроны не свободны, а находятся в связанных состояниях. Естественно возникает вопрос, как устранить кулоновскую расходимость в случае идеальной плазмы, где электроны изначально находятся в свободном состоянии, и энергия их взаимодействия с положительными ионами пренебрежимо мала. Впервые правильный ответ на этот вопрос был, судя по всему, получен Г.А. Крамерсом (Н.А. Kramers) [34].

Из общих соображений понятно, что кулоновскую расходимость

мость при вычислении эффективного торможения можно устранить, лишь приняв во внимание искажения, вносимые в задачу о чисто кулоновском рассеянии быстрого заряда на свободном электроне другими частицами среды — окружающими ионами и соседними свободными электронами. В случае идеальной плазмы для этого достаточно учесть эффект её поляризации под действием электрического поля быстрого заряда. При этом нас вполне удовлетворит простейшая континуальная модель плазмы, в которой электронная жидкость с плотностью массы $m_e n_e$ и плотностью электрического заряда $-en_e$ движется на однородном и неподвижном фоне бесконечно тяжёлой ионной жидкости с плотностью электрического заряда $+en_{e0}$, которая в невозмущённом состоянии плазмы (т.е. при $n_e = n_{e0}$) в точности компенсирует плотность заряда электронов (так называемая модель однокомпонентной плазмы). Далее рассчитаем движение отдельного электрона с массой m_e и зарядом $-e$, рассматривая его как пробный заряд, погружённый в плазменную жидкость, под воздействием электрического поля со стороны пролетающего заряда. Всё рассмотрение проведём в рамках нерелятивистской классической механики.

Поляризуемость плазмы в нашей модели связана с тем, что элементы электронной жидкости с течением времени смещаются относительно своего исходного положения, и это смещение разное для разных элементов жидкости. Пусть $\vec{r}_e = \vec{r}_e(t, \vec{x})$ — вектор этого смещения в момент времени t в точке \vec{x} . Здесь \vec{x} — вектор с компонентами $\{x_i\} = \{x, y, z\}$ в системе координат, изображённой на рис. 2.5. Поскольку смещение измеряется относительно начального невозмущённого состояния при $t \rightarrow -\infty$, то $\vec{r}_e(-\infty, \vec{x}) = 0$. Если плоскость x, y выбрана за плоскость столкновения, то от координаты z , очевидно, ничего не зависит, и её можно исключить из рассмотрения.

Из рис. 2.5 видно, что в конечном итоге надо вычислить эффект поляризации в точке с координатами $\vec{x} = \{0, b, 0\}$. Как и в вычислениях Бора для классического осциллятора, мож-

но вполне оправданно воспользоваться дипольным приближением, применимость которого в нашем случае контролируется условием $|\vec{r}_e| \ll b$. Из дальнейших вычислений станет ясно, что для применимости дипольного приближения достаточно, чтобы выражение под знаком логарифма в полученной формуле для L было много больше единицы. Поскольку характерный масштаб пространственных вариаций возмущающего поля в точке $\vec{x} = \{0, b, 0\}$ равен или превышает b , то условие применимости дипольного приближения может быть выражено в виде любого из двух эквивалентных неравенств

$$|\vec{r}_e| \ll b \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{\partial r_{e,i}}{\partial x_k} \right| \ll 1, \quad (2.105)$$

где индексы i и k в общем случае пробегают значения 1, 2, 3.

Смещение электронов вызывает изменение их плотности n_e . Воспользовавшись условием (2.105), мы можем вычислить изменение электронной плотности в первом порядке по теории возмущений, представив её в виде

$$n_e(t, \vec{x}) = n_{e0} + n_{e1}(t, \vec{x}), \quad (2.106)$$

где n_{e0} — начальная (невозмущённая) плотность, а $|n_{e1}| \ll n_{e0}$. Для этого воспользуемся уравнением непрерывности для электронной жидкости

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div} (n_e \vec{u}_e) = 0, \quad (2.107)$$

где

$$\vec{u}_e = \frac{d\vec{r}_e}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{r}_e \approx \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial t} \quad - \quad (2.108)$$

скорость электронов. Во второй части равенства (2.108) стоит лагранжева производная d/dt , вычисляемая для фиксированного элемента электронной жидкости. В силу условия (2.105) в третьей части равенства (2.108) можно пренебречь членом $(\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{r}_e$ по сравнению с \vec{u}_e в левой части (2.108). Подставляя (2.106) и

(2.108) в (2.107) и удерживая лишь члены первого порядка по малым величинам \vec{r}_e и n_{e1} , получаем

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_{e0} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{r}_e = 0. \quad (2.109)$$

Интегрируя (2.109) по времени, находим

$$n_{e1} = -n_{e0} \operatorname{div} \vec{r}_e. \quad (2.110)$$

Постоянная интегрирования (произвольная функция вектора \vec{x}) равна нулю потому, что при $\vec{r}_e = 0$ возмущение плотности отсутствует и $n_{e1} = 0$.

Поскольку компенсирующий фон ионной компоненты плазмы считается неподвижным, изменение исходной электронной плотности на величину n_{e1} приводит к возникновению объёмной плотности заряда $-en_{e1}$. В результате на рассматриваемый отдельный электрон плазмы будет действовать суммарное электрическое поле $\vec{\mathcal{E}}$, определяемое уравнением

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} &= -4\pi en_{e1} + 4\pi Z_1 e \delta(\vec{x} - \vec{v}t) = \\ &= 4\pi en_{e0} \operatorname{div} \vec{r}_e + 4\pi Z_1 e \delta(\vec{x} - \vec{v}t). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Первое слагаемое в правой части (2.111) представляет собой источник поля поляризации плазмы $\vec{\mathcal{E}}_{pol}$, второе слагаемое — источник поля быстрого точечного заряда $+Z_1 e$, летящего со скоростью \vec{v} . При $v \ll c$ уравнение (2.111) можно проинтегрировать по координатам в потенциальном (квазистатическом) приближении. Для поляризационной компоненты поля сразу получаем $\vec{\mathcal{E}}_{pol} = 4\pi en_{e0} \vec{r}_e$, тогда как поле быстрого заряда определяется выражениями (2.26) при $\beta = 0$.

Определив электрическое поле $\vec{\mathcal{E}}$, можно записать уравнение движения отдельного (пробного) электрона в точке $\vec{x} = \{0, b, 0\}$ в виде

$$\ddot{\vec{r}}_e = -\frac{e}{m_e} \vec{\mathcal{E}} = -\frac{4\pi e^2 n_{e0}}{m_e} \vec{r}_e + \frac{1}{m_e} \vec{F}(t), \quad (2.112)$$

где компоненты силы $\vec{F}(t)$ даны выражениями (2.71). Сравнивая (2.112) с уравнением движения (2.72) для электрона в осцилляторе модели Бора, обнаруживаем замечательный факт, что эти два уравнения движения в точности эквивалентны друг другу, если под собственной частотой осциллятора ω понимать плазменную частоту

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_{e0}}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (2.113)$$

Тем самым задача о кулоновском торможении на свободных электронах холодной плазмы свелась к уже решённой задаче о торможении на электронах, связанных в гармонических осцилляторах. Приняв условие $b_0 \ll b_{ad} = v/\omega_p$, можно повторить все рассуждения параграфа 2.6.2 и получить для кулоновского торможения в плазме ту же самую формулу Бора (2.85), в которой теперь вместо ω стоит ω_p . Этот результат был доказан Крамерсом в 1947 году [34] прямым применением теории диэлектрической проницаемости для холодной плазмы. Аналогичные квантовые вычисления Линдхарда (J. Lindhard) в 1954 г. [38] и Ларкина в 1959 г. [39] показали, что при условии $\alpha_v \ll 1$ тормозная способность холодной плазмы в точности описывается формулой Бете (2.96), в которой опять же частота осциллятора ω должна быть заменена на плазменную частоту ω_p . Последнее означает, что в общем случае для вычисления кулоновского логарифма холодной плазмы L необходимо применять формулу Блоха (2.98), положив в ней $\omega = \omega_p$, при условии, конечно, что получаемые значения L достаточно велики по сравнению с единицей.

Отметим, что проведённое выше вычисление поляризуемости плазмы является по сути применением формализма диэлектрической проницаемости. В рамках этого формализма получаем формулу (2.81) для передачи энергии одному электрону $\Delta E_1(b)$. Тот факт, что интеграл от вычисленного таким образом $\Delta E_1(b)$ по прицельным параметрам b расходится при $b \rightarrow 0$, т.е. при больших переданных импульсах, как раз и иллюстрирует то общее свойство данного формализма, что в нём кулоновская рас-

ходимость устраняется на малых переданных импульсах, но появляется при больших.

Формуле Бора—Крамерса для кулоновского торможения в холодной плазме можно дать следующую простую качественную интерпретацию. Следствием известной зависимости диэлектрической проницаемости холодной плазмы от частоты ω [40, §31]

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (2.114)$$

является то обстоятельство, что электромагнитные возмущения с характерными частотами $\omega < \omega_p$ не проникают в плазму, поскольку они экранируются подстраивающимися смещениями электронной жидкости. В нашей ситуации это означает, что в столкновениях с прицельными параметрами $b > v/\omega_p$, происходящих с характерным временем $b/v > \omega_p^{-1}$, электроны среды перестают ощущать переменное электрическое поле от пролетающего заряда, которое практически полностью экранируется подстраивающимися смещениями других, более близких к быстрому заряду, электронов. В результате, если воспользоваться выражением для кулоновского логарифма в виде $L = \ln(b_{\max}/b_0)$, то в качестве максимального прицельного параметра следует использовать величину $b_{\max} = v/\omega_p$.

В заключение этого параграфа оценим область применимости формулы Бора—Крамерса. С одной стороны, вывод этой формулы базируется на условии $b_0 \ll b_{ad} = v/\omega_p$, которое, в частности, гарантирует, что значение кулоновского логарифма L будет достаточно большим по сравнению с единицей. Вспомнив выражения (2.66) для b_0 и (2.113) для ω_p (где теперь опускаем индекс “0” у n_{e0}), обнаруживаем, что условие $b_0 \ll v/\omega_p$ приводит к следующему ограничению сверху на плотность плазмы:

$$n_e \ll \frac{1}{4\pi Z_1^2} \left(\frac{m_e v^2}{e^2} \right)^3 = 5.4 \times 10^{23} Z_1^{-2} \left(\frac{v}{v_0} \right)^6 \text{ см}^{-3}, \quad (2.115)$$

где $v_0 = e^2/\hbar = 2.1877 \times 10^8$ см/с — боровская скорость. С другой стороны, для применения модели динамически поляризуе-

мой электронной жидкости необходимо, чтобы в объёме b_{ad}^3 одновременно находилось много электронов, т.е. чтобы выполнялось условие

$$n_e \left(\frac{v}{\omega_p} \right)^3 \gg 1, \quad (2.116)$$

которое опять же приводит к ограничению сверху на плотность плазмы

$$n_e \ll \left(\frac{m_e v^2}{4\pi e^2} \right)^3 = 3.4 \times 10^{21} \left(\frac{v}{v_0} \right)^6 \text{ см}^{-3}. \quad (2.117)$$

Сравнивая два условия (2.115) и (2.117), видим, что они почти эквивалентны друг другу и почти всегда выполняются на практике, когда скорость быстрого заряда v превосходит боровскую скорость v_0 .

2.8.2 Горячая плазма

До сих пор предполагалось, что полевые частицы до столкновения с быстрым зарядом находятся в состоянии покоя. Теперь рассмотрим важный случай, когда полевые частицы с зарядом e_2 и массой m_2 имеют максвелловское распределение по скоростям, соответствующее температуре T . Такая задача естественным образом возникает, когда требуется определить скорость кулоновских потерь в плазме, где доминирующий вклад в торможение обусловлен взаимодействием с максвелловским газом свободных электронов. Воспользовавшись аддитивностью вклада отдельных столкновений, решим эту задачу в два этапа: сначала определим скорость торможения на подмножестве полевых частиц, имеющих одно и то же фиксированное значение скорости \vec{v}_2 в \mathcal{L} -системе, а затем произведём усреднение по скоростям \vec{v}_2 с максвелловской весовой функцией. При этом ограничимся случаем нерелятивистских температур $T \ll m_2 c^2$.

Ясно, что задача о кулоновском торможении на свободных полевых частицах, имеющих хоть и отличную от нуля, но одинаковую для всех скорость, простым преобразованием координат

сводится к задаче о торможении на покоящихся полевых частицах, рассмотренной в параграфе 2.4. Пусть \vec{v}_1 — скорость быстрого заряда, а \vec{v}_2 — скорость полевых частиц в \mathcal{L} -системе. Ограничиваясь нерелятивистским рассмотрением, полагаем $v_1 \ll c$, $v_2 \ll c$. Тогда соответствующие значения импульсов до и после столкновения составляют

	до столкновения	после столкновения
быстрый заряд	$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$	$\vec{p}'_1 = \vec{p}_1 - \vec{q}$
полевая частица	$\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$	$\vec{p}'_2 = \vec{p}_2 + \vec{q}$

(2.118)

Как обычно, кинематический анализ столкновения удобнее всего производить в \mathcal{U} -системе. В этой системе направление сближения сталкивающихся частиц задаётся вектором относительной скорости

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad (2.119)$$

направление которой, как и ранее в параграфе 2.4, принимаем за ось x . При этом, естественно, сохраняются формулы (2.38)–(2.42) для векторного разложения переданного импульса \vec{q} и формула (2.44) для дифференциального сечения рассеяния. Подчеркнём, что азимутальный угол ϕ отсчитывается в плоскости, перпендикулярной вектору относительной скорости (2.119). Соотношения (2.39) и (2.41) позволяют выразить q_{\parallel} через q :

$$q_{\parallel} = \frac{q^2}{2mv}. \quad (2.120)$$

Здесь следует отметить следующее важное обстоятельство. При сложении потерь энергии в столкновениях с полевыми частицами, имеющими разные начальные скорости \vec{v}_2 , аддитивными являются величины dE/dt и $dE/dx = v_1^{-1} dE/dt$, но не эффективное торможение $S = -(n_2 v)^{-1} dE/dt$, поскольку теперь относительная скорость $v = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ будет разной для разных групп полевых частиц. Таким образом, имеем право усреднять по

максвелловскому распределению полевых частиц средней скоростью тормозных потерь dE/dt и тормозную способность dE/dx , но не эффективное торможение S .

Существенное отличие от случая покоящихся полевых частиц возникает при вычислении переданной энергии ΔE_1 , для чего нужно опять вернуться в \mathcal{L} -систему:

$$\begin{aligned}\Delta E_1 &= -\Delta E_2 = \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - \frac{(\vec{p}_2 + \vec{q})^2}{2m_2} = \\ &= -\frac{q^2}{2m_2} - \vec{v}_2 \cdot \vec{q} = -\frac{q^2}{2m_2} - q_{\parallel} \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}}{v} - q_{\perp} \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{b}}{b}.\end{aligned}\quad (2.121)$$

Чтобы получить dE/dt , выражение (2.121) надо умножить на $n_2 v$ и $d\sigma$ из (2.44), а затем проинтегрировать по переменным ϕ и q [см. (2.20)]. Поскольку ни q_{\parallel} , ни q_{\perp} , ни дифференциальное сечение рассеяния не зависят от ϕ , в подынтегральном выражении (2.22) эта зависимость появляется лишь от третьего слагаемого в последней части равенства (2.121) и определяется множителем

$$\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{b}}{b} = v_{2y} \cos \phi + v_{2z} \sin \phi, \quad (2.122)$$

интеграл от которого по интервалу $0 \leq \phi < 2\pi$ равен нулю. В соответствии с этим слагаемое с q_{\perp} в (2.121) можно опустить и, воспользовавшись соотношениями (2.119) и (2.120), преобразовать выражение для передачи энергии в одном столкновении к виду

$$\Delta E_1 = \frac{q^2}{2m} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}}{v^2} \right). \quad (2.123)$$

Подставляя (2.123) и (2.44) в (2.20), получаем искомое выражение для скорости энергетических потерь быстрого заряда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{mv} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}}{v^2} \right) n_2 L \quad (2.124)$$

на полевых частицах, имеющих в \mathcal{L} -системе фиксированную скорость \vec{v}_2 . Кулоновский логарифм L определяется выражением (2.45).

Прежде чем переходить к максвелловскому усреднению, обратим внимание на то обстоятельство, что формула (2.124) даёт результат, который может соответствовать как кулоновскому торможению ($dE/dt < 0$), так и кулоновскому ускорению ($dE/dt > 0$) быстрого заряда. Действительно, в частном случае $\vec{v}_2 = 0$ покоящихся полевых частиц формула (2.124) переходит в обычное выражение

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{m_2 v_1} n_2 L \quad (2.125)$$

для скорости кулоновских потерь энергии, которое отвечает полученному ранее эффективному торможению (2.29). Однако, если полевые частицы движутся в том же направлении, что и быстрый заряд, но с более высокой скоростью (т.е. при $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = v_2 v_1 > v_1^2$), то выражение в скобках в (2.124) положительно и “быстрый” заряд ускоряется, что вполне согласуется с интуитивным представлением. В частности, при $\vec{v}_1 = 0$ покоящийся заряд будет набирать энергию со скоростью

$$\frac{dE}{dt} = +\frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{m_1 v_2} n_2 L. \quad (2.126)$$

Чтобы провести усреднение по тепловым скоростям полевых частиц, правую часть формулы (2.124) необходимо умножить на функцию распределения

$$f(\vec{v}_2) = \left(\frac{m_2}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2T}\right), \quad (2.127)$$

нормированную условием $\int f d^3\vec{v}_2 = 1$, и проинтегрировать по всему пространству скоростей \vec{v}_2 . В формуле (2.124) скорость полевых частиц \vec{v}_2 входит как в кулоновский логарифм L , так и в множитель перед логарифмом. Нас, естественно, в первую очередь интересует наиболее сильный эффект, связанный с предлогарифмическим множителем. Для выявления этого эффекта

можно пренебречь слабой зависимостью кулоновского логарифма L от \vec{v}_2 и вынести его из-под знака интеграла.

Усреднение первого слагаемого в правой части (2.124) сводится к вычислению интеграла

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \int \frac{f(\vec{v}_2)}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} d^3\vec{v}_2 = \frac{1}{v_1} \Phi(\xi_1), \quad (2.128)$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-t^2} dt \quad (2.129)$$

функция ошибок, а $\xi_1 = v_1/v_{2T}$ есть отношение скорости быстрого заряда v_1 к средней тепловой скорости полевых частиц

$$v_{2T} = \left(\frac{2T}{m_2} \right)^{1/2}. \quad (2.130)$$

Во второй части (2.128) мы воспользовались известной формулой

$$\int \frac{\exp(-\vec{r}^2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} d^3\vec{r} = \int \frac{\exp[-(\vec{r} + \vec{r}_0)^2]}{|\vec{r}|} d^3\vec{r} = \frac{\pi^{3/2}}{r_0} \Phi(r_0). \quad (2.131)$$

Второй интеграл в (2.131) легко вычисляется в полярных координатах, если в качестве полярной оси выбрать фиксированный вектор \vec{r}_0 .

Максвелловское усреднение второго слагаемого в (2.124) легко сводится к уже выполненному усреднению величины $1/v$, если воспользоваться тождеством

$$-\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}}{v^3} = \vec{v}_1 \cdot \nabla_{v_1} \left(\frac{1}{v} \right) \quad (2.132)$$

и поменять порядок операций дифференцирования по компонентам \vec{v}_1 и интегрирования по компонентам \vec{v}_2 ; выше ∇_{v_1} — опера-

тор градиента относительно компонент скорости быстрого заряда \vec{v}_1 . Усредняя (2.132) с весовой функцией $f(\vec{v}_2)$, получаем

$$\left\langle -\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}}{v^3} \right\rangle = \vec{v}_1 \cdot \nabla_{v_1} \left[\frac{1}{v_1} \Phi(\xi_1) \right] = v_1 \frac{d}{dv_1} \left[\frac{1}{v_1} \Phi(\xi_1) \right] = -\frac{1}{v_1} G(\xi_1), \quad (2.133)$$

где

$$G(\xi) = \Phi(\xi) - \xi \frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^\xi e^{-t^2} dt - \xi e^{-\xi^2} \right]. \quad (2.134)$$

Эта функция лишь множителем $2\xi^2$ отличается от используемой в теории динамического трения функции Чандрасекара [41]: в наших обозначениях функция Чандрасекара определяется выражением $(2\xi^2)^{-1}G(\xi)$. Легко убедиться, что функция $G(\xi)$ положительна и монотонно возрастает при всех $\xi > 0$; её асимптотическое поведение при малых и больших значениях аргумента имеет вид

$$G(\xi) = \begin{cases} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \xi^3, & \xi \ll 1, \\ 1, & \xi \gg 1. \end{cases} \quad (2.135)$$

Окончательно, подставляя (2.128) и (2.133) в (2.124), получаем следующую формулу для скорости потерь энергии на максвелловском газе полевых частиц с массой m_2 и температурой T :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{m_2 v_1} \left[G(\xi_1) - \frac{m_2}{m_1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi_1 e^{-\xi_1^2} \right] n_2 L. \quad (2.136)$$

Для торможения быстрых ионов с зарядом $Z_1 e$ в горячей плазме первостепенное значение имеет случай, когда полевыми частицами являются свободные электроны с температурой T_e , и $m_2 = m_e \ll m_1$. В этом случае в широком диапазоне скоростей вторым слагаемым в скобках (2.136) можно пренебречь, что приводит нас к следующему выражению для тормозной способности

горячей плазмы:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} G\left(\frac{v}{v_{eT}}\right) n_e L, \quad (2.137)$$

где, следуя обозначениям предыдущих параграфов, опускаем индекс “1” у скорости быстрой частицы; здесь $v_{eT} = \sqrt{2T_e/m_e}$ — тепловая скорость электронов. Легко оценить, что величина $G(\xi_1)$ доминирует в скобке правой части (2.136) при $v > (3m_e/2m_1)^{1/2} v_{eT}$.

Формула (2.137) отличается от полученного ранее общего выражения (2.51) наличием функции $G(v/v_{eT})$, которая учитывает роль теплового движения электронов плазмы. Как и следовало ожидать, при высоких скоростях быстрого заряда $v \gg v_{eT}$, когда $G = 1$, эти две формулы дают один и тот же результат. Если же скорость быстрого заряда v опускается ниже тепловой скорости электронов плазмы, то с хорошей точностью можно использовать выражение

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{m_e^{1/2} Z_1^2 e^4}{T_e^{3/2}} v n_e L, \quad (2.138)$$

которое соответствует асимптотике (2.135) при $\xi \ll 1$. Формула (2.138) широко применяется при оценке пробегов быстрых заряженных продуктов ядерных реакций в горячей ТЯ плазме. Согласно этой формуле, с ростом электронной температуры T_e пробеги заряженных частиц возрастают пропорционально $T_e^{3/2}$.

Как легко установить из (2.136), формула (2.138) применима в интервале скоростей $(3m_e/2m_1)^{1/2} < v/v_{eT} < 1$. При более низких скоростях быстрой частицы необходимо учитывать второе слагаемое в скобках (2.136), что приводит к следующему выражению для скорости потерь энергии:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8\sqrt{\pi} Z_1^2 e^4}{m_1 v_{eT}} \left(1 - \frac{m_1 v^2}{3T_e}\right) n_e L. \quad (2.139)$$

Согласно этому выражению скорость обмена энергией между быстрым зарядом и электронным газом обращается в нуль при $E \equiv \frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{3}{2}T_e$. Последнее обстоятельство вполне согласуется с общим термодинамическим принципом, согласно которому равновесие между максвелловским ансамблем быстрых частиц с температурой T_1 и максвелловским ансамблем электронов с температурой T_e наступает при $T_1 = T_e$, причём средняя энергия быстрой частицы в таком ансамбле равна $\langle E \rangle = \frac{1}{2}m_1\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}T_1 = \frac{3}{2}T_e$. Действительно, структура формулы (2.139) такова, что при любом способе усреднения по ансамблю быстрых частиц $d\langle E \rangle/dt \propto 1 - \frac{2}{3}\langle E \rangle/T_e$ — чего не скажешь, например, про выражение (2.136).

В качестве примера применения полученных выше формул оценим эффективный (не фактический!) кулоновский пробег $\langle l \rangle_\alpha$ альфа-частиц с энергией $E_\alpha = 3.52$ МэВ, образующихся в реакции D+T в горячей DT-плазме. Эффективный пробег оценим по формуле (2.58), где значение тормозной способности dE/dx вычисляется согласно (2.137) при $Z_1 = Z_\alpha = 2$ и скорости быстрого иона $v = v_\alpha = (2E_\alpha/m_\alpha)^{1/2}$, равной начальной скорости рождающихся альфа-частиц. Для функции $G(\xi)$ примем простейшую аппроксимацию

$$G(\xi) \approx \min \left\{ 1; \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \xi^3 \right\}, \quad (2.140)$$

удовлетворяющую обеим асимптотикам (2.135), а кулоновский логарифм L положим равным фиксированному значению $L = 5$, отвечающему реальным условиям в мишенях ИТС. Поскольку при фиксированном L тормозная способность dE/dx пропорциональна плотности DT-плазмы ρ , пробег альфа-частиц удобно выразить в массовых единицах:

$$\langle \rho l \rangle_\alpha \approx \begin{cases} 0.003 \text{ г см}^{-2}, & T_e \leq 0.4 \text{ кэВ}, \\ 0.003 \left(\frac{T_e}{0.4 \text{ кэВ}} \right)^{3/2} \text{ г см}^{-2}, & T_e > 0.4 \text{ кэВ}. \end{cases} \quad (2.141)$$

Сопоставляя эти значения с пробегами 14-мэвных нейтронов (2.5), видим, что, по крайней мере, на стадии разгорания DT-топлива при $T_e \lesssim 10$ кэВ быстрые альфа-частицы имеют существенно меньшие пробеги, чем быстрые нейтроны. Отметим, что при $T_e \gtrsim 30$ кэВ из-за быстрого уменьшения функции $G(v/v_{eT})$ в тормозной способности DT-топлива для альфа-частиц начинают доминировать не учтённые в (2.141) кулоновские столкновения с ионами плазмы.

В заключение данного параграфа обратимся снова к кулоновскому логарифму L , который до сих пор считали некоторой постоянной величиной. Но поскольку, как было выяснено в предыдущих параграфах, L , хоть и слабо, но зависит от скорости (и, вообще говоря, от массы) быстрого заряда, возникает резонный вопрос, к каким изменениям в величине L может привести учёт теплового движения полевых частиц? На этот вопрос легко ответить качественно, вспомнив вывод формулы (2.124): ясно, что кулоновский логарифм в (2.124) определяется теми же формулами Крамерса—Линдхарда—Ларкина, полученными в пределе $v \gg v_{eT}$ высоких скоростей быстрого заряда v , если под v понимать его скорость относительно полевых электронов. Последнее означает, что для практической оценки кулоновского логарифма в горячей плазме достаточно, например, в формулах Крамерса—Линдхарда—Ларкина заменить скорость быстрого заряда v под логарифмом на величину $(v^2 + v_{eT}^2)^{1/2}$, которая правильно передаёт значение относительной скорости как в пределе $v \gg v_{eT}$, так и в пределе $v \ll v_{eT}$. Напомним также, что массы m_1 и m_2 входят в кулоновский логарифм через приведённую массу сталкивающихся частиц $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.

Контрольные вопросы

1. Какие элементарные процессы играют основную роль в передаче энергии быстрых нейтронов, рождающихся в ядерных реакциях синтеза, ТЯ плазме DT и DD топлива?

2. При каких условиях можно пренебречь нагревом ТЯ топлива быстрыми нейтронами, рождающимися в реакциях синтеза?
3. Как соотносятся между собой массовые пробеги 2.45-мэвных нейтронов от D+D реакции и 14-мэвных нейтронов от D+T реакции в DD-топливе?
4. Какую долю своей энергии быстрый нейтрон в среднем теряет при упругом рассеянии на протоне (дифференциальное сечение рассеяния можно считать изотропным в системе центра инерции)?
5. Каковы два основных упрощающих предположения при приближения быстрого пролёта при вычислении кулоновских потерь энергии?
6. Как кулоновская тормозная способность dE/dx в общем случае зависит от скорости быстрого заряда v ? От массы полевых частиц m_2 ?
7. Что такое пик Брэгга?
8. На каких пределах интегрирования появляется кулоновская расходимость при вычислении кулоновской тормозной способности dE/dx в приближении быстрого пролёта? В строгой теории парных столкновений со свободными зарядами среды?
9. Какое предположение Бора в его модели явилось ключевым для устранения кулоновской расходимости при вычислении эффективного торможения быстрых заряженных частиц?
10. Что такое адиабатический прицельный параметр при столкновении с электроном, связанным в осцилляторе с собственной частотой ω ? Чему он равен?

11. В чём состоит суть дипольного приближения при описании столкновения быстрого иона со свободным и (или) связанным электроном среды?
12. Чем отличаются формулы Бора и Бете для кулоновского логарифма L ?
13. Как формула Бете для торможения на атомных электронах отличается от той же формулы для торможения на электронах, связанных в квантовом осцилляторе?
14. В каком отношении к формулам Бора и Бете для кулоновского торможения находится формула Блоха?
15. Чем отличаются формулы для кулоновской тормозной способности dE/dx в нейтральном газе и в холодной плазме?
16. Чем отличаются формулы для кулоновской тормозной способности dE/dx в холодной ($v \gg \sqrt{2T_e/m_e}$) и горячей ($v \ll \sqrt{2T_e/m_e}$) плазме?

Глава 3

Перенос энергии излучением и теплопроводностью

3.1 Тепловое излучение в термоядерной плазме

При плотностях энергии, характерных для ТЯ плазмы, важную роль в переносе энергии играет тепловое излучение. Если тепловое излучение находится в состоянии термодинамического равновесия с веществом, имеющим температуру T , то его спектральная плотность энергии определяется формулой Планка [42, §63], а полная плотность энергии равна

$$\mathcal{E}_r = aT^4 = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3} T^4 = 1.37 \times 10^{14} T_{keV}^4 \text{ эрг см}^{-3}, \quad (3.1)$$

где T_{keV} — температура T , измеренная в килоэлектронвольтах. Сравнивая эту величину с плотностью тепловой энергии электронов и ионов

$$\mathcal{E}_m = 3nT = \frac{3\rho T}{2.5m_u} = 1.16 \times 10^{15} \rho_{g/cc} T_{keV} \text{ эрг см}^{-3} \quad (3.2)$$

в DT-плазме, содержащей $n = \rho/(2.5m_u)$ ядер и столько же электронов в единице объёма, видим, что при температурах, превышающих несколько кэВ, энергия теплового излучения начинает быстро доминировать в общей плотности энергии. В формуле (3.2) m_u — атомная единица массы, $\rho_{g/cc}$ — плотность DT-топлива в г/см³.

Если теперь предположить, что ТЯ горение происходит в условиях равновесия между излучением и веществом, то, зная теплотворную способность DT-топлива $q_{DT} = 3.37 \times 10^{18}$ эрг/г, можно воспользоваться условием $\mathcal{E}_r \leq \rho q_{DT} - \mathcal{E}_m < \rho q_{DT}$ и получить следующую оценку сверху на температуру DT-плазмы:

$$T < 12.5 (\rho_{g/cc})^{1/4} \text{ кэВ} \quad (3.3)$$

при условии полного выгорания ТЯ топлива. Эта оценка справедлива и для DD-топлива, поскольку оно обладает практически такой же калорийностью.

Условие (3.3) указывает на то, что в равновесных (по излучению) условиях и при не очень высоких плотностях топлива ρ развитие ТЯ вспышки может быть фактически полностью подавлено стремительно (пропорционально T^3) растущей теплоёмкостью излучения. Действительно, анализируя зависимость скорости DT-реакции на рис. 1.3, можно заключить, что эффективная ТЯ вспышка за счёт самонагрева DT-топлива может произойти только тогда, когда уже небольшой доли выгорания (скажем, $f_b \lesssim 0.03-0.05$) хватает, чтобы поднять температуру топлива до $T > 10$ кэВ. Если к тому же учтём, что быстрые нейтроны уносят почти всю свою энергию из зоны реакции, то придём к выводу, что в условиях равновесия с излучением такая вспышка практически невозможна при $\rho < 100$ г/см³. На эффективное горение в равновесных условиях можно рассчитывать разве что при сверхвысоких плотностях топлива $\rho \gtrsim 1000$ г/см³.

Проведённое рассуждение ясно показывает, что осуществление ТЯ зажигания будет значительно облегчено в условиях, когда равновесие между веществом и тепловым излучением нару-

шено, и характерная плотность энергии излучения существенно отстаёт от равновесного значения (3.1). Последнее означает, что правильное теоретическое моделирование ТЯ мишеней ИТС должно включать в себя адекватную модель для описания процессов взаимодействия неравновесного излучения с веществом и переноса лучистой энергии.

3.2 Описание фотонного газа

Со времён Планка и Эйнштейна правильное описание поля теплового излучения базируется на понятии светового кванта — фотона. Произвольное поле излучения можно представлять себе как идеальный газ из невзаимодействующих релятивистских частиц — фотонов. Фотон есть минимальная порция электромагнитной энергии $E_\nu = h\nu = \hbar\omega$, на которую может изменяться энергия поля излучения, соответствующая циклической частоте колебаний ν (или угловой частоте $\omega = 2\pi\nu$). Наряду с определённым значением энергии, фотон обладает также определённым значением импульса

$$\vec{p}_\nu = \frac{E_\nu}{c} \vec{\Omega} = \frac{h\nu}{c} \vec{\Omega}, \quad (3.4)$$

где $\vec{\Omega}$ — единичный вектор в направлении распространения фотона. Вместо импульса фотона \vec{p}_ν часто используется равнозначная характеристика — волновой вектор фотона

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}_\nu}{\hbar} = \frac{\omega}{c} \vec{\Omega} = \frac{2\pi\nu}{c} \vec{\Omega}. \quad (3.5)$$

Конкретные состояния хаотического (а значит, неполяризованного) поля излучения удобно описывать с помощью безразмерной функции распределения фотонов $n_r = n_r(t, \vec{x}, \vec{p}_\nu)$ в фазовом пространстве \vec{x}, \vec{p}_ν . При этом фазовое пространство фотонов \vec{x}, \vec{p}_ν удобно представлять себе разбитым на отдельные элементарные ячейки объёмом h^3 каждая. Такое условное разбиение

восходит к разложению произвольного свободного электромагнитного поля в ряд Фурье по собственным колебаниям [9, §52], при котором на каждый элемент объёма $dV d^3\vec{k}$ в фазовом пространстве \vec{x}, \vec{k} приходится

$$\frac{dV d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \quad (3.6)$$

независимых собственных мод; другими словами, на каждую независимую моду колебаний в \vec{x}, \vec{k} пространстве приходится фазовый объём $(2\pi)^3$, что, в свою очередь, соответствует объёму $(2\pi\hbar)^3 = h^3$ в \vec{x}, \vec{p}_ν пространстве. Функция распределения $n_r(t, \vec{x}, \vec{p}_\nu)$ определена таким образом, что в момент времени t в каждой элементарной ячейке фазового пространства с координатами \vec{x}, \vec{p}_ν и объёмом h^3 в среднем находится $2n_r$ фотонов. Множитель 2 есть статистический вес фотонного состояния \vec{x}, \vec{p}_ν , обязанный своим происхождением двум линейно независимым состояниям поляризации электромагнитной волны с фиксированным волновым вектором \vec{k} .

Зная числа заполнения ячеек фазового пространства $n_r(t, \vec{x}, \vec{p}_\nu)$, можно легко вычислить интересующие нас характеристики поля излучения. Так полное число фотонов в единице объёма определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_r(t, \vec{x}) &= \frac{2}{h^3} \int n_r(t, \vec{x}, \vec{p}_\nu) d^3\vec{p}_\nu = \\ &= \frac{2}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 d\nu \int_{4\pi} n_r(t, \vec{x}, \nu, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad [\text{см}^{-3}], \quad (3.7) \end{aligned}$$

где $d\vec{\Omega}$ — элемент телесного угла в пространстве импульсов \vec{p}_ν . Переход от переменных \vec{p}_ν к переменным $\nu, \vec{\Omega}$ эквивалентен переходу к сферическим координатам в пространстве импульсов. Плотность энергии излучения вычисляется по аналогичной фор-

муле

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r(t, \vec{x}) &= \frac{2}{h^3} \int h\nu n_r(t, \vec{x}, \vec{p}_\nu) d^3\vec{p}_\nu = \\ &= \frac{2h}{c^3} \int_0^\infty \nu^3 d\nu \int_{4\pi} n_r(t, \vec{x}, \nu, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad [\text{эрг см}^{-3}]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В качестве альтернативной дифференциальной характеристики поля излучения в классической теории лучистого переноса часто используется интенсивность, определённая как

$$I_r(t, \vec{x}, \nu, \vec{\Omega}) = \frac{2n_r d^3\vec{p}_\nu}{h^3} \frac{c h\nu}{d\nu d\vec{\Omega}} = \frac{2h}{c^2} \nu^3 n_r(t, \vec{x}, \nu, \vec{\Omega}). \quad (3.9)$$

Согласно общим принципам квантовой статистики, фотоны подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна [42, §54]. Как следствие, в термодинамическом равновесии средние числа заполнения ячеек фазового объёма идеального фотонного газа определяются формулой Планка [42, §63]

$$n_r(\nu, \vec{\Omega}) = n_{r,P}(\nu, T) = \frac{1}{\exp(h\nu/T) - 1}, \quad (3.10)$$

которая представляет собой частный случай равновесного распределения Бозе—Эйнштейна при равном нулю химическом потенциале газа. Подставляя (3.10) в (3.8) и интегрируя по ν и $\vec{\Omega}$, получаем известную формулу для плотности энергии равновесного (чернотельного) излучения

$$\mathcal{E}_{r,P} = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3} T^4 = aT^4. \quad (3.11)$$

В мишенях ИТС макроскопические и микроскопические скорости частиц плазмы существенно ниже скорости света, и для их описания можно пользоваться нерелятивистской теорией. Однако фотоны являются чисто релятивистскими частицами, которые в любой системе отсчёта движутся со скоростью света c .

Последнее означает, что при рассмотрении различных процессов взаимодействия излучения с веществом в движущихся друг относительно друга системах отсчёта необходимо использовать релятивистские формулы преобразования интересующих нас физических величин. Приведём наиболее важные из этих формул, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть имеется неподвижная (лабораторная) система отсчёта K и система K' , движущаяся относительно неё со скоростью $\vec{v} = \vec{\beta}c$. Выбираем ось x системы K вдоль направления скорости \vec{v} и считаем, что система K' получена из системы K простым параллельным ускорением (без пространственных поворотов) до скорости \vec{v} . Пусть далее в системе K имеется фотон, характеризующийся частотой ν и вектором распространения $\vec{\Omega}$, который для простоты считаем лежащим в плоскости xy . Тот же фотон, наблюдаемый из системы K' , будет иметь частоту ν' и вектор распространения $\vec{\Omega}'$. Воспользовавшись общими формулами релятивистского преобразования для компонент 4-импульса фотона [9, §9], получаем следующие формулы связи между $\nu, \vec{\Omega}$ и $\nu', \vec{\Omega}'$:

$$\frac{\nu}{\nu'} = \frac{1 + \vec{\beta} \cdot \vec{\Omega}'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\Omega}}, \quad (3.12)$$

$$\left(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\Omega}\right) \left(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{\Omega}'\right) = 1 - \beta^2, \quad (3.13)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{d\vec{\Omega}'} = \frac{1 - \beta^2}{\left(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{\Omega}'\right)^2} = \frac{\left(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\Omega}\right)^2}{1 - \beta^2}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим далее, как преобразуется введённая выше функция распределения в фазовом пространстве $n_r(t, \vec{x}, \nu, \vec{\Omega})$. Для этого мысленно выделим (“пометим”) группу фотонов, которая в системе K занимает объём dV координатного пространства, и объём $d^3\vec{p}_\nu$ импульсного пространства. В системе K' эти же фотоны будут занимать, соответственно, координатный и импульсный объёмы dV' и $d^3\vec{p}'_\nu$. Полное число фотонов в выделенной

группе,

$$2n_r(t, \vec{x}, \nu, \vec{\Omega}) \frac{dV d^3\vec{p}_\nu}{h^3} = 2n'_r(t', \vec{x}', \nu', \vec{\Omega}') \frac{dV' d^3\vec{p}'_\nu}{h^3}, \quad (3.15)$$

не зависит от того, в какой системе отсчёта его вычислять. Поскольку $E_\nu = c\sqrt{p_{\nu x}^2 + p_{\nu y}^2 + p_{\nu z}^2}$ и все компоненты 4-импульса фотона полностью определяются заданием трёх компонент вектора \vec{p}_ν , преобразование импульсного объёма $d^3\vec{p}_\nu$ можно найти, вычислив соответствующий трёхмерный якобиан:

$$\frac{d^3\vec{p}_\nu}{d^3\vec{p}'_\nu} = \frac{\nu^2 d\nu d\vec{\Omega}}{(\nu')^2 d\nu' d\vec{\Omega}'} = \frac{\partial(p_{\nu x}, p_{\nu y}, p_{\nu z})}{\partial(p'_{\nu x}, p'_{\nu y}, p'_{\nu z})} = \frac{1 + \vec{\beta} \cdot \vec{\Omega}'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.16)$$

Чтобы найти преобразование координатного объёма dV , выделим элемент 4-объёма $dV\Delta t$, образуемый следующим множеством событий: в системе K в момент $t = 0$ “включаем” наблюдение за всеми фотонами в объёме dV и ведём это наблюдение вплоть до момента $t = \Delta t$. Поскольку преобразования Лоренца сохраняют 4-объём (четырёхмерный якобиан $\partial(t, x, y, z)/\partial(t', x', y', z') = 1$), то $dV\Delta t = dV'\Delta t'$. Если теперь рассмотрим то же множество событий из системы K' , то процесс наблюдения за выделенной группой фотонов будет продолжаться время $\Delta t'$, за которое эти фотоны сместятся вдоль оси x' на расстояние $\Delta x' = c\Delta t'\Omega'_x$. Соотношение между Δt и $\Delta t'$ определяется преобразованием Лоренца [9, §4],

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \beta\Delta x'/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta t' \frac{1 + \vec{\beta} \cdot \vec{\Omega}'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.17)$$

откуда находим

$$\frac{dV}{dV'} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \vec{\beta} \cdot \vec{\Omega}'}. \quad (3.18)$$

Сопоставляя (3.16) и (3.18), видим, что $dV d^3\vec{p}_\nu = dV' d^3\vec{p}'_\nu$, т.е. элемент фазового объёма $dV d^3\vec{p}_\nu$ выделенной группы фотонов является релятивистским инвариантом. С учётом равенства

(3.15) последнее означает, что и плотность заполнения ячеек фазового объёма n_r также является релятивистским инвариантом,

$$n_r(t, \vec{x}, \nu, \vec{\Omega}) = n'_r(t', \vec{x}', \nu', \vec{\Omega}'). \quad (3.19)$$

3.3 Обмен энергии между фотонами и электронами при комптоновском рассеянии

В ТЯ плазме важную роль играет процесс рассеяния фотонов на свободных электронах. В рамках классической электродинамики это обычное томсоновское рассеяние [9, §78]; с учётом квантовых эффектов его принято называть комптоновским рассеянием. Если томсоновское рассеяние фотона происходит на покоящемся электроне, то его частота ν не меняется, а сечение рассеяния для неполяризованного излучения составляет

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 0.665 \times 10^{-24} \text{ см}^2. \quad (3.20)$$

Дифференциальное сечение рассеяния имеет рэлеевскую индикатрису

$$\frac{d\sigma}{d\vec{\Omega}} = \sigma_T \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta), \quad (3.21)$$

где θ — угол рассеяния.

Если, однако, поле излучения представлять состоящим из отдельных частиц — фотонов, то рассеяние каждого фотона $h\nu$ на покоящемся электроне должно сопровождаться уменьшением его частоты ν (*эффект Комптона* или *эффект отдачи*). Действительно, пусть ν и $\vec{\Omega}$ — частота и направление распространения фотона до рассеяния, а ν_* и $\vec{\Omega}_*$ — те же величины после рассеяния. Тогда, применяя закон сохранения 4-импульса к системе “фотон + электрон”, легко получить следующую формулу для

частоты ν_* после рассеяния:

$$\nu_* = \nu \left[1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} \left(1 - \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}_* \right) \right]^{-1}. \quad (3.22)$$

В пределе $h\nu \ll m_e c^2$ среднее относительное изменение частоты фотона в каждом акте рассеяния составляет

$$\frac{\langle \Delta\nu \rangle}{\nu} \equiv \frac{\langle \nu_* - \nu \rangle}{\nu} = -\frac{h\nu}{m_e c^2} \quad (3.23)$$

и играет важную роль в установлении теплового равновесия между фотонным и электронным газом. В отличие от эффекта отдачи, квантовые поправки к сечению рассеяния,

$$\sigma_C = \sigma_T \left(1 - 2\frac{h\nu}{m_e c^2} + \dots \right), \quad (3.24)$$

практической роли не играют и ниже не учитываются. Поскольку фотоны при рассеянии не гибнут и не рождаются, то в процессе комптоновского рассеяния полное число фотонов сохраняется.

Чтобы правильно вычислить обмен энергии между электронами и излучением, недостаточно знать свойства рассеяния на покоящихся электронах: необходимо рассмотреть рассеяние фотонов на движущемся электроне, а затем провести усреднение по максвелловскому распределению тепловых скоростей электронного газа. Для начала проведём рассмотрение в рамках классической электродинамики, т.е. пренебрегая эффектом отдачи. Пусть $\vec{v}_e = \vec{\beta}_e c$ — скорость электрона в лабораторной системе, ν и $\vec{\Omega}$ — частота и направление фотона до рассеяния, ν_* и $\vec{\Omega}_*$ — эти же величины после рассеяния в той же лабораторной системе. Предположим далее, что в сопутствующей системе, где электрон покоится, имеет место чисто томсоновское рассеяние, и частота фотона в результате рассеяния не меняется, т.е. $\nu' = \nu'_*$. Тогда, воспользовавшись формулами преобразования (3.12), легко находим изменение частоты в одном акте рассеяния в \mathcal{L} -системе:

$$\frac{\nu_*}{\nu} = \frac{\nu'_*}{\nu'} \frac{1 - \vec{\beta}_e \cdot \vec{\Omega}}{1 - \vec{\beta}_e \cdot \vec{\Omega}_*} = \frac{1 - \vec{\beta}_e \cdot \vec{\Omega}}{1 - \vec{\beta}_e \cdot \vec{\Omega}_*}. \quad (3.25)$$

Причиной этого изменения частоты фотона в \mathcal{L} -системе является классический *эффект Доплера*, возникающий из-за движения рассеивающего электрона.

Ниже ограничимся нерелятивистскими температурами электронов $T_e \ll m_e c^2$, для которых $\beta_e \ll 1$. Из (3.25) видно, что эффект Доплера проявляется уже в первом порядке по β_e . В зависимости от направлений $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Omega}_*$ по отношению к вектору $\vec{\beta}_e$ частота фотона в результате рассеяния может как уменьшиться, так и возрасти. Изменение частоты ограничено интервалом

$$\frac{1 - \beta_e}{1 + \beta_e} < \frac{\nu_*}{\nu} < \frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e}. \quad (3.26)$$

Если провести усреднение сдвига частоты $\Delta\nu = \nu_* - \nu$ по направлениям $\vec{\beta}_e$ и $\vec{\Omega}_*$, то в первом порядке по β_e средний сдвиг $\langle \Delta\nu \rangle = 0$. Отличный от нуля результат для $\langle \Delta\nu \rangle$ возникает лишь во втором порядке по β_e . Для максвелловского газа электронов с температурой T_e средний сдвиг фотона по частоте за счёт эффекта Доплера в одном акте томсоновского рассеяния составляет

$$\frac{\langle \Delta\nu \rangle}{\nu} = +4 \frac{T_e}{m_e c^2}. \quad (3.27)$$

Таким образом, при томсоновском рассеянии на максвелловских электронах монохроматическая линия расширяется по частоте на величину $\sqrt{\langle (\Delta\nu)^2 \rangle} / \nu \sim \sqrt{T_e / m_e c^2}$ и сдвигается вверх по частоте на величину $\langle \Delta\nu \rangle / \nu \sim T_e / m_e c^2$. Положительный знак результата в (3.27) означает, что чисто классическое (томсоновское) рассеяние излучения на свободных электронах не может привести к установлению теплового равновесия между электронами и излучением: если зафиксировать температуру электронов, то за счёт эффекта Доплера излучение будет непрерывно нагреваться, и его энергия будет расти экспоненциально во времени. Установление равновесия становится возможным лишь после того, как будет учтён эффект Комптона, приводящий к отрицательному сдвигу частоты фотонов (3.23).

В общем случае обмен энергии между электронами и излучением при комптоновском рассеянии описывается интегро-дифференциальным кинетическим уравнением для функции $n_r(t, \vec{x}, \nu, \vec{\Omega})$. Если, однако, выполнены условия $h\nu \ll m_e c^2$ и $T_e \ll m_e c^2$, то в частном случае изотропного поля излучения к интегралу столкновения можно применить разложение Фоккера—Планка, соответствующее случаю малой примеси лёгкого газа к тяжёлому [40, §21], и свести его к дифференциальному оператору диффузионного типа. Такой упрощённый вариант кинетического уравнения был впервые получен А.С. Компанейцем [43] и имеет вид

$$\frac{\partial n_r}{\partial t} = n_e \sigma_{TC} \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \nu^4 \left[\frac{T_e}{m_e c^2} \frac{\partial n_r}{\partial \nu} + \frac{h}{m_e c^2} n_r (1 + n_r) \right]. \quad (3.28)$$

В этом уравнении $n_r = n_r(t, \nu)$, n_e — число свободных электронов в единице объёма. Уравнение Компанейца описывает эволюцию спектра изотропного излучения за счёт комптоновского рассеяния в бесконечно большом объёме, заполненном однородным газом свободных электронов с плотностью n_e и температурой T_e . Помимо оригинальной публикации А.С. Компанейца [43] вывод этого уравнения приведен в обзорной статье Я.Б. Зельдовича [44].

Остановимся на основных свойствах уравнения Компанейца. Первый член в квадратной скобке (3.28) описывает эволюцию спектра под действием классического эффекта Доплера. Соответствующий дифференциальный оператор имеет диффузионный вид (т.е. второго порядка по частоте) и пропорционален отношению $T_e/m_e c^2$. Это вполне согласуется с отмеченным выше свойством эффекта Доплера приводить к диффузионному расплыванию монохроматической линии при рассеянии на максвелловских электронах. Второе слагаемое в квадратной скобке (3.28), пропорциональное постоянной Планка h , передаёт роль комптоновского сдвига по частоте при рассеянии на холодных электронах. Комптоновский сдвиг описывается дифференциальным оператором первого порядка по частоте и не зависит от

температуры электронов T_e . Множитель $(1 + n_r)$, описывающий вклад индуцированного рассеяния, делает уравнение Компанейца нелинейным относительно искомой функции n_r . При определённых условиях эта нелинейность может приводить к специфическим эффектам типа спектральных “ударных волн” [44].

Нетрудно убедиться, что уравнение (3.28) сохраняет полное число фотонов \mathcal{N}_r в единице объёма. Действительно, если мы, вспомнив выражение (3.7) для \mathcal{N}_r , домножим (3.28) на $8\pi\nu^2/c^3$ и проинтегрируем по частоте ν , то в результате получим $d\mathcal{N}_r/dt = 0$. При этом, конечно, предполагаем выполненными граничные условия

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu^4 \frac{\partial n_r}{\partial \nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^4 \frac{\partial n_r}{\partial \nu} = 0, \quad (3.29)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu^4 n_r = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^4 n_r = 0, \quad (3.30)$$

гарантирующие, что среднее число заполнения $n_r(\nu)$ не слишком быстро возрастает при $\nu \rightarrow 0$ и достаточно быстро убывает при $\nu \rightarrow \infty$. В нормальных физических ситуациях условия (3.29) и (3.30) всегда выполнены. Напомним, что равновесное значение $n_r = n_{r,P}(\nu)$ [см. формулу (3.10)] возрастает пропорционально ν^{-1} при $\nu \rightarrow 0$ и экспоненциально убывает при $\nu \rightarrow \infty$.

Следующее важное свойство уравнения (3.28) состоит в том, что его правая часть тождественно обращается в нуль для функции распределения вида

$$n_r = n_{r,BE} = \frac{1}{\exp[(h\nu - \mu)/T_e] - 1} \quad (3.31)$$

при произвольном значении постоянной μ . Функция (3.31) является равновесной функцией распределения для идеального газа, подчиняющегося статистике Бозе—Эйнштейна [42, §54]. При этом $\mu \leq 0$ есть химический потенциал этого газа, который определяется из условия нормировки функции распределения $n_{r,BE}$ на заданное число фотонов \mathcal{N}_r в единице объёма. Последнее означает, что уравнение Компанейца правильно описывает релакса-

цию произвольного неравновесного спектра фотонов к равновесному распределению Бозе—Эйнштейна (3.31) при заданной фиксированной плотности числа фотонов \mathcal{N}_r . Планковское равновесие соответствует частному случаю $\mu = 0$, когда число фотонов не является сохраняющейся величиной, а само подстраивается под состояние полного термодинамического равновесия.

Однако главная ценность уравнения Компанейца (3.28) для ИТС состоит в том, что оно позволяет вычислить скорость обмена энергии между электронным и фотонным газом за счёт комптоновского рассеяния. Действительно, умножая уравнение (3.28) на $8\pi h\nu^3/c^3$ и интегрируя по частоте ν , получаем следующее выражение для удельной (на единицу объёма) мощности нагрева фотонного газа:

$$\frac{d\mathcal{E}_r}{dt} = n_e \sigma_{Tc} \left[\frac{4T_e}{m_e c^2} \mathcal{E}_r - \frac{8\pi h^2}{m_e c^5} \int_0^\infty n_r (1 + n_r) \nu^4 d\nu \right]. \quad (3.32)$$

При этом следует дважды проинтегрировать по частям первое слагаемое в правой части (3.28), и один раз — второе, принять во внимание определение (3.8) плотности лучистой энергии \mathcal{E}_r и воспользоваться граничными условиями (3.29), в которых ν^4 заменено на ν^5 . Если фотонный газ, взаимодействуя со свободными электронами, нагревается со скоростью (3.32), то электронный газ будет, очевидно, охлаждаться с той же скоростью. Другими словами, формула (3.32) даёт удельную (на единицу объёма) мощность охлаждения электронной компоненты плазмы при комптоновском рассеянии на имеющемся в данном месте поле излучения с объёмной плотностью энергии \mathcal{E}_r .

Отметим, что положительное первое слагаемое в правой части (3.32), представляющее эффект Доплера и ответственное именно за охлаждение электронов, не зависит от вида спектра присутствующего излучения и в этом смысле имеет универсальный вид. Для второго слагаемого, которое отрицательно и описывает нагрев электронов за счёт эффекта отдачи, в общем случае не удаётся получить столь же универсальное выражение.

Однако присутствующий в этом слагаемом интеграл тоже выражается через \mathcal{E}_r , если предположить, что поле излучения имеет квазиравновесный бозе—эйнштейновский спектр

$$n_r(\nu) = n_{r,BE}(\nu, T_r) = \frac{1}{\exp[(h\nu - \mu)/T_r] - 1}, \quad (3.33)$$

но с отдельным значением температуры $T_r \neq T_e$. В этом важном приближении отдельной температуры для излучения скорость обмена энергии (3.32) принимает особенно простой и наглядный вид

$$\frac{d\mathcal{E}_r}{dt} = 4n_e\sigma_T c \frac{T_e - T_r}{m_e c^2} \mathcal{E}_r. \quad (3.34)$$

Именно это выражение используется для описания комптоновского охлаждения плазмы при гидродинамическом моделировании мишеней ИТС в приближении трёх отдельных температур — ионов, T_i , электронов, T_e , и излучения, T_r . Учитывая, что плотность тепловой энергии горячих электронов составляет $\frac{3}{2}n_e T_e$, из (3.34) легко оценить характерное время t_{cs} установления теплового равновесия между электронами и фотонами за счёт комптоновского рассеяния:

$$t_{cs}^{-1} \equiv \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dt} = \frac{8\sigma_T}{3m_e c} \mathcal{E}_r \approx 0.89 \times 10^{11} \left(\frac{T_r}{10 \text{ кэВ}} \right)^4 \text{ с}^{-1}. \quad (3.35)$$

В этой оценке для плотности лучистой энергии $\mathcal{E}_r = aT_r^4$ принято равновесное планковское значение (3.11). Отметим, что время комптоновской релаксации t_{cs} не зависит от плотности электронов n_e и уменьшается обратно пропорционально локальной плотности энергии излучения \mathcal{E}_r . При $T_r \approx 10$ кэВ это время составляет около 10 пс, что существенно короче времени гидродинамического разлёта даже при субмиллиметровых размерах ТЯ топлива.

3.4 Поглощение и излучение фотонов в термоядерной плазме

Помимо комптоновского рассеяния, при рассмотрении обмена энергии между излучением и веществом необходимо обязательно учесть процессы рождения (излучения) и гибели (поглощения) фотонов. В общем случае в ТЯ плазме присутствуют как свободные, так и связанные электроны. В этой связи различают три механизма поглощения фотонов, сопровождающихся тремя типами электронных переходов, а именно, поглощение при: 1) свободно-свободных (free-free), 2) свободно-связанных (free-bound) и 3) связанно-связанных (bound-bound) переходах. Поглощение при свободно-свободных переходах называют также *тормозным поглощением*, поскольку при этом фотон поглощается в процессе ускоренного движения свободного электрона в кулоновском поле одного из ионов плазмы. В классической электродинамике хорошо известен обратный процесс *тормозного излучения* (bremsstrahlung), имеющий место при движении свободного электрона по гиперболической орбите в кулоновском поле иона [9, §70]. В условиях, близких к зажиганию термоядерной реакции, ТЯ топливо можно с хорошей точностью считать полностью ионизованным, и на первый план выступает процесс тормозного поглощения (излучения). Поглощение фотонов при свободно-связанных и связанно-связанных переходах становится важным либо при наличии частично ионизованных тяжёлых примесей в ТЯ топливе, либо в соседних с ТЯ топливом слоях, состоящих из более тяжёлых элементов и находящихся при менее высоких температурах.

В качестве основной формулы при описании тормозного поглощения воспользуемся следующим выражением для сечения поглощения фотона $h\nu$ на одном водородоподобном ионе с зарядом $+eZ_i$ в плазме с максвелловскими (т.е. невырожденными)

свободными электронами:

$$\sigma_{ff}(\nu, T_e) = \frac{32\pi^3}{3\sqrt{6}\pi} \alpha a_0^5 \left(\frac{e^2/a_0}{T_e} \right)^{1/2} \left(\frac{e^2/a_0}{h\nu} \right)^3 n_e Z_i^2 \bar{g}_M \text{ [см}^2\text{]}. \quad (3.36)$$

Здесь $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137.036$ — постоянная тонкой структуры, $a_0 = \hbar^2/m_e e^2 = 0.52918 \times 10^{-8}$ см — боровский радиус, n_e [см $^{-3}$] — число свободных электронов в единице объёма, \bar{g}_M — безразмерный коэффициент порядка единицы, называемый фактором Гаунта. Поскольку тормозное поглощение фотона происходит при столкновении трёх частиц — фотона, электрона и иона — сечение поглощения σ_{ff} , рассчитанное на один ион, зависит от термодинамических параметров электронного газа — плотности n_e и температуры T_e .

При выводе (3.36) обычно отталкиваются от дифференциального сечения излучения тормозных фотонов

$$d\sigma_{ff,em} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \alpha \frac{Z_i^2 e^4}{m_e c^2} \frac{g(\varepsilon'_e, \varepsilon_e)}{\varepsilon'_e h\nu} d h\nu \quad (3.37)$$

в интервал энергий $[h\nu, h\nu + d(h\nu)]$ при рассеянии на ионе $+eZ_i$ электрона с начальной энергией ε'_e в состояние с конечной энергией $\varepsilon_e = \varepsilon'_e - h\nu$, к которому применяют принцип детального равновесия и усредняют по максвелловскому распределению свободных электронов с энергиями ε_e (подробнее см. [1], гл. V). При $g(\varepsilon'_e, \varepsilon_e) = 1$ формула (3.37) представляет собой высокочастотный предел классической формулы для тормозного излучения, которая выводится в рамках модели парных столкновений с помощью классического расчёта движения электрона в кулоновском поле иона [9]; эта формула носит имя формулы Крамерса (Н.А. Kramers) [45]. Множитель $g(\varepsilon'_e, \varepsilon_e)$ в (3.37), называемый фактором Гаунта (J.A. Gaunt), учитывает различные (низкочастотные классические, квантовые) поправки к сравнительно простой формуле Крамерса [46, 47]. Точное значение $g(\varepsilon'_e, \varepsilon_e)$, вычисленное Зоммерфельдом для дипольных свободно-свободных пе-

реходов в рамках нерелятивистской квантовой механики [48], выражается через гипергеометрическую функцию и неудобно для использования. На практике обычно применяют либо высокоэнергетическое борновское приближение

$$g_B(\varepsilon'_e, \varepsilon_e) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\varepsilon'_e} + \sqrt{\varepsilon_e}}{\sqrt{\varepsilon'_e} - \sqrt{\varepsilon_e}}, \quad (3.38)$$

либо более точную аппроксимационную формулу Эльверта (G. Elwert) [49]

$$g_E(\varepsilon'_e, \varepsilon_e) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{\varepsilon'_e}{\varepsilon_e} \right)^{1/2} \frac{1 - \exp\left(-2\pi Z_i \sqrt{\text{Ry}/\varepsilon'_e}\right)}{1 - \exp\left(-2\pi Z_i \sqrt{\text{Ry}/\varepsilon_e}\right)} \ln \frac{\sqrt{\varepsilon'_e} + \sqrt{\varepsilon_e}}{\sqrt{\varepsilon'_e} - \sqrt{\varepsilon_e}}, \quad (3.39)$$

где $\text{Ry} = m_e e^4 / 2\hbar^2 = 13.6$ эВ — потенциал ионизации атома водорода. При $\varepsilon'_e \gg Z_i^2 \text{Ry}$, $\varepsilon_e \gg Z_i^2 \text{Ry}$ формула Эльверта (3.39) переходит в формулу Борна (3.38).

В формуле (3.36) для $\sigma_{ff}(\nu, T_e)$ стоит усреднённый по энергиям максвелловских электронов фактор Гаунта

$$\bar{g}_M = \bar{g}_M(h\nu, T_e) = \frac{1}{T_e} \int_0^\infty g(\varepsilon_e + h\nu, \varepsilon_e) e^{-\varepsilon_e/T_e} d\varepsilon_e, \quad (3.40)$$

который легко вычисляется в борновском приближении

$$\begin{aligned} \bar{g}_{BM}(h\nu, T_e) &= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \exp\left(\frac{h\nu}{2T_e}\right) K_0\left(\frac{h\nu}{2T_e}\right) = \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left(\ln \frac{4T_e}{h\nu} - \gamma_E \right), & h\nu \ll T_e, \\ \left(\frac{3}{\pi} \frac{T_e}{h\nu} \right)^{1/2}, & h\nu \gg T_e; \end{cases} \end{aligned} \quad (3.41)$$

здесь $K_0(z)$ — функция Макдональда, $\gamma_E = 0.5772\dots$ — постоянная Эйлера. Более точные значения \bar{g}_M можно, например, найти в [50].

В теории переноса излучения вместо сечения поглощения фотона σ часто используется понятие *коэффициента поглощения* $k = n\sigma$ [см⁻¹], где n — число поглощающих частиц в единице объёма. Обратная величина k^{-1} является, очевидно, ни чем иным, как средней длиной свободного пробега фотона. Согласно (3.36) коэффициент тормозного поглощения фотонов с частотой ν в максвелловском электронном газе определяется выражением

$$\begin{aligned} k_{ff}(\nu, T_e) &= \sigma_{ff}(\nu, T_e) n_i = & (3.42) \\ &= \frac{32\pi^3}{3\sqrt{6\pi}} \alpha a_0^5 \left(\frac{e^2/a_0}{T_e}\right)^{1/2} \left(\frac{e^2/a_0}{h\nu}\right)^3 n_e n_i Z_i^2 \bar{g}_M, \end{aligned}$$

где n_i — число ионов с зарядом $+eZ_i$ в единице объёма. Если плазма состоит не из одного, а из нескольких сортов водородо-подобных ионов, то в формуле (3.42) (и всех её следствиях) произведение $n_i Z_i^2$ необходимо заменить на сумму $\sum_i n_i Z_i^2$ по всем сортам ионов.

Зная коэффициент тормозного поглощения, можно воспользоваться законом Кирхгофа и вычислить тормозную излучательную способность плазмы. Закон Кирхгофа является частным случаем принципа детального равновесия, который гласит, что в полном термодинамическом равновесии должно соблюдаться динамическое равновесие отдельно по каждому прямому и соответствующему ему обратному процессам. Если прямым считать процесс тормозного поглощения фотона $\nu, \vec{\Omega}$ максвелловской плазмой, то обратным будет процесс тормозного излучения такого же фотона. Рассмотрим условие динамического равновесия между этими двумя процессами.

Спектральная излучательная способность вещества при свободно-свободных переходах описывается величиной j_{ff} [эрг см⁻³ с⁻¹ стер⁻¹ Гц⁻¹], которая определяется следующим образом: $j_{ff} d\nu d\vec{\Omega}$ есть количество лучистой энергии, излучаемой спонтанно единичным объёмом вещества в интервал частот $d\nu$ в интервал телесных углов $d\vec{\Omega}$ в единицу времени. Выражение “излучаемой спонтанно” следует понимать так, что в точке с коорди-

натами \vec{x} эта энергия будет излучена в том случае, когда в ячейке фазового пространства с координатами $\vec{x}, \nu, \vec{\Omega}$ полностью отсутствуют фотоны. В случае изотропной плазмы j_{ff} не зависит от направления излучения $\vec{\Omega}$.

При полном термодинамическом равновесии электроны и ионы имеют общую температуру $T_e = T$, и в веществе присутствует излучение с равновесной планковской интенсивностью

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} n_{r,P} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/T) - 1} \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \text{ с стер } \Gamma_{\text{ц}}} \right]. \quad (3.43)$$

Чтобы рассмотреть баланс между процессами излучения и поглощения фотонов, выберем некоторое направление их распространения $\vec{\Omega}$ и малый объём плазмы $dS dx$, представляющий собой цилиндр длиной dx вдоль направления $\vec{\Omega}$ и площадью основания dS перпендикулярно $\vec{\Omega}$ (рис. 3.1). За время dt из этого объёма в интервал частот $d\nu$ и телесных углов $d\vec{\Omega}$ спонтанным образом будет излучена энергия $j_{ff} d\nu d\vec{\Omega} dS dx dt$. К этому спонтанному излучению надо добавить индуцированное излучение, которое учитывается умножением спонтанно излученной энергии на множитель $(1 + n_r)$, где n_r — число заполнения ячеек фазового объёма для уже имеющихся в данном месте фотонов $\nu, \vec{\Omega}$.

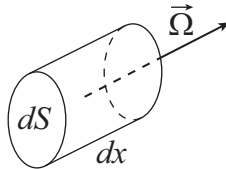


Рис. 3.1. Элементарный цилиндрический объём с площадью основания dS и длиной dx вдоль направления распространения фотонов $\vec{\Omega}$

Чтобы определить поглощённую энергию, заметим, что по определению интенсивности B за время dt в объём $dS dx$ входит количество лучистой энергии, равное $B d\nu d\vec{\Omega} dS dt$; из этого

количества на малой длине dx поглощается относительная доля $k_{ff} dx$ (по определению коэффициента поглощения k_{ff}). В результате, условие равновесия между процессами излучения и поглощения принимает вид

$$j_{ff} dv d\vec{\Omega} dS dx dt (1 + n_r) = B dv d\vec{\Omega} dS dt k_{ff} dx, \quad (3.44)$$

откуда, подставляя равновесное значение $n_r = [\exp(h\nu/T) - 1]^{-1}$, получаем известный закон Кирхгофа

$$j_{ff}(\nu, T) = k_{ff}(\nu, T) [1 - \exp(-h\nu/T)] B(\nu, T) \quad (3.45)$$

и следующее выражение для тормозной излучательной способности максвелловской плазмы:

$$j_{ff}(\nu, T_e) = \frac{8\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \alpha^3 e^2 a_0^2 \left(\frac{e^2/a_0}{T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{T_e}\right) n_e n_i Z_i^2 \bar{g}_M. \quad (3.46)$$

Здесь следует подчеркнуть, что после того, как мы вычислили обе величины k_{ff} и j_{ff} в терминах плазменных параметров n_e , T_e , n_i , Z_i , нам уже неважно, какое в плазме присутствует поле излучения. Для применимости формул (3.42) и (3.46) достаточно, чтобы в каждой точке пространства в каждый момент времени свободные электроны плазмы имели равновесное максвелловское распределение с температурой T_e , т.е. чтобы плазма находилась в частичном локальном термодинамическом равновесии по электронной компоненте; при этом поле излучения может быть как угодно далеко от равновесного. Именно поэтому в формулах (3.42) и (3.46) стоит температура электронов T_e , а не общая равновесная температура T . Использование приближения частичного локального равновесия по электронной компоненте (сокращённо — приближения ЛТР) оправдано значительно более быстрой релаксацией электронов в столкновениях между собой, чем релаксация между фотонным газом и электронами.

Явление индуцированного излучения, играющее принципиально важную роль в общей теории взаимодействия излучения

с веществом, учтено в (3.44) множителем $(1 + n_r)$. Однако в приближении ЛТР его можно описать и другим эквивалентным способом, а именно, введя соответствующую поправку к коэффициенту поглощения k . Действительно, поскольку процесс индуцированного излучения даёт приращение к уже имеющемуся при данных ν и $\vec{\Omega}$ полю излучения, пропорциональное его интенсивности, то этот процесс фактически эквивалентен отрицательному поглощению (положительное поглощение даёт убыль уже имеющегося излучения, пропорциональную его интенсивности). Эта отрицательная добавка к коэффициенту поглощения k проявляется в виде множителя $[1 - \exp(-h\nu/T)]$ в законе Кирхгофа (3.45). Соответственно, наряду с *коэффициентом истинного поглощения* $k_{ff}(\nu, T_e)$, определяемым выражением (3.42), вводится *коэффициент поглощения, исправленный за индуцированное испускание*,

$$\tilde{k}_{ff}(\nu, T_e) = k_{ff}(\nu, T_e) [1 - \exp(-h\nu/T_e)]. \quad (3.47)$$

Переопределив таким образом коэффициент поглощения (т.е. используя \tilde{k} вместо k), можно при описании лучистого переноса в приближении ЛТР забыть про индуцированное испускание и принимать во внимание только спонтанную излучательную способность. Отметим, что принцип действия лазера основан именно на том, что в некотором спектральном интервале реализуются отрицательные значения $\tilde{k} < 0$, соответствующие отрицательной эффективной температуре $T_e < 0$ при инверсной заселённости некоторых возбуждённых электронных уровней.

На практике часто реализуется ситуация, когда рассматриваемый объём плазмы является оптически тонким для рождающихся фотонов, т.е. практически все родившиеся фотоны свободно покидают рассматриваемый объём, не испытывая взаимодействия с веществом. В этом случае роль индуцированного излучения в интеграле по спектру пренебрежимо мала, и спонтанное тормозное излучение представляет собой чистый механизм охлаждения плазмы. Удельная (на единицу объёма) мощность

такого охлаждения получается интегрированием излучательной способности $j_{ff}(\nu, T_e)$ по спектру ν и направлениям $\vec{\Omega}$, и для максвелловской плазмы составляет

$$\begin{aligned}
 W_{ff} &= 4\pi \int_0^{\infty} j_{ff}(\nu, T_e) d\nu = \\
 &= \frac{16\sqrt{2}\pi}{3\sqrt{3}} \alpha^4 e^2 a_0 c \left(\frac{T_e}{e^2/a_0} \right)^{1/2} \langle g \rangle_M n_e n_i Z_i^2 = \\
 &= 5.36 \times 10^{-24} T_{e, \text{keV}}^{1/2} n_e n_i Z_i^2 \text{ эрг см}^{-3} \text{ с}^{-1}. \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\langle g \rangle_M = \langle g \rangle_M(\Theta_e) = \frac{1}{T_e} \int_0^{\infty} \bar{g}_M(h\nu, T_e) \exp\left(-\frac{h\nu}{T_e}\right) dh\nu \quad (3.49)$$

усреднённое по частоте значение гаунт-фактора \bar{g}_M . В общем случае безразмерный множитель $\langle g \rangle_M$ является функцией одного безразмерного параметра $\Theta_e = T_e/Z_i^2 \text{ Ry}$. В табл. 3.1 приведены выборочные значения $\langle g \rangle_{EM}$ этого множителя, вычисленные в приближении Эльверта. В пределе $\Theta_e \gg 1$ значения $\langle g \rangle_M$ выходят на борновский предел $\langle g \rangle_{BM} = 2\sqrt{3}/\pi = 1.103$, который и использован во второй части формулы (3.48). Из табл. 3.1 видно, что в ТЯ плазме изотопов водорода при температуре $T_e \gtrsim 1.5$ кэВ погрешность борновского приближения для величины W_{ff} не превышает 10 %.

3.5 Средние росселандов и планковский пробеги по тормозному поглощению

Чтобы в конкретной ситуации понять, в каком режиме осуществляется лучистый перенос энергии в плазме, необходимо, в первую очередь, уметь оценить средние росселандов, l_R , и

Таблица 3.1. Значения дважды усреднённого фактора Гаунта $\langle g \rangle_{EM}$ для удельной мощности тормозного охлаждения максвелловской плазмы, полученные интегрированием аппроксимационной формулы Эльверта (3.39) при различных значениях нормированной температуры электронов Θ_e

Θ_e	0.3162	1.0	3.162	10	31.62	100	3162	1000
$\langle g \rangle_{EM}$	1.527	1.515	1.468	1.384	1.292	1.218	1.170	1.141

планковский, l_P , пробеги излучения. Если характерные размеры плазмы превышают росселандов пробег l_R , то лучистый перенос можно описывать в диффузионном приближении (или в приближении лучистой теплопроводности), поскольку коэффициент диффузии квазиравновесного излучения в этом случае равен $cl_R/3$. Если предположить, что единственным механизмом непрозрачности является тормозное поглощение, то для росселандова пробега в максвелловской плазме можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 l_{R,ff} &= \int_0^\infty [\tilde{k}_{ff}(\nu, T_e)]^{-1} \frac{\partial B(\nu, T_e)}{\partial T_e} d\nu \bigg/ \int_0^\infty \frac{\partial B(\nu, T_e)}{\partial T_e} d\nu = \\
 &= \frac{3\sqrt{6\pi}}{32\pi^3} \frac{1}{\alpha a_0^5 n_e n_i Z_i^2} \left(\frac{T_e}{e^2/a_0} \right)^{7/2} \frac{C_{KR}}{\bar{g}_M} = \\
 &= 70.677 \frac{A^2 T_{e,keV}^{7/2}}{\rho_{g/cc}^2 Z_i^3 \bar{g}_M} \text{ см}, \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

где дважды усреднённый гаунт-фактор \bar{g}_M определяется формулой

$$\bar{g}_M = C_{KR} \bigg/ \int_0^\infty \frac{x^3}{1 - e^{-x}} \frac{R(x)}{\bar{g}_M(x, \Theta_e)} dx, \tag{3.51}$$

в которой $x = h\nu/T_e$,

$$R(x) = \frac{15}{4\pi^4} \frac{x^4 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \quad - \quad (3.52)$$

весовая функция для усреднения по Росселанду, нормированная условием $\int_0^\infty R(x) dx = 1$, а постоянная C_{KR} равна

$$C_{KR} = \int_0^\infty \frac{x^3}{1 - e^{-x}} R(x) dx = 196.519569 \dots \quad (3.53)$$

В практической части формулы (3.50) $T_{e,keV}$ — электронная температура в кэВ, $\rho_{g/cc}$ — плотность плазмы в г/см².

Таблица 3.2. Значения дважды усреднённого фактора Гаунта $\bar{\bar{g}}_{EM}$ для росселандова пробега $l_{R,ff}$ в максвелловской плазме, полученные интегрированием аппроксимационной формулы Эльверта (3.39) при различных значениях нормированной температуры электронов Θ_e

Θ_e	0.3162	1.0	3.162	10	31.62	100	316.2	1000
$\bar{\bar{g}}_{EM}$	1.1212	1.0150	0.8305	0.6464	0.5152	0.4371	0.3939	0.3705

В общем случае фактор $\bar{\bar{g}}_M$ зависит от нормированной температуры электронов Θ_e . В табл. 3.2 приведены значения $\bar{\bar{g}}_M$, вычисленные для ряда значений Θ_e в приближении Эльверта. В борновском приближении множитель $\bar{\bar{g}}_M$ имеет универсальное значение $\bar{\bar{g}}_{BM} = 0.341978 \dots$. Из табл. 3.2 видно, что в плазме изотопов водорода при $T_e \gtrsim 4.5$ кэВ погрешность использования борновского приближения для оценки $\bar{\bar{g}}_{BM}$ не превышает 15 %.

Средний планковский пробег

$$l_{P,ff} = \int_0^\infty B(\nu, T_e) d\nu \bigg/ \int_0^\infty \tilde{k}_{ff}(\nu, T_e) B(\nu, T_e) d\nu \quad (3.54)$$

используется тогда, когда требуется выяснить применимость оптически тонкого приближения для скорости лучистого охлаждения плазмы. Физический смысл планковского пробега можно пояснить следующим примером. Если рассмотрим конечный цилиндрический объём однородной плазмы длиной Δx (аналогичный изображённому на рис. 3.1) и, воспользовавшись уравнением переноса излучения в приближении ЛТР, вычислим поток лучистой энергии dF [эрг см⁻² с⁻¹], выходящий из этого объёма в направлении $\vec{\Omega}$ в элемент телесного угла $d\vec{\Omega}$, то получим величину

$$\frac{dF}{d\vec{\Omega}} = \begin{cases} \frac{\sigma_{SB} T_e^4}{\pi} \frac{\Delta x}{l_{P,ff}}, & \Delta x \ll l_{P,ff}, \\ \frac{\sigma_{SB} T_e^4}{\pi}, & \Delta x \gg l_{P,ff}, \end{cases} \quad (3.55)$$

где $\sigma_{SB} = \pi^2/(60\hbar^3 c^2)$ — постоянная Стефана—Больцмана. Последнее означает, что лучистое охлаждение ограниченного объёма плазмы можно физически корректно оценивать по оптически тонким формулам для тормозного излучения лишь до тех пор, пока поперечные размеры этого объёма не превышают $l_{P,ff}$.

Подставляя (3.47) и (3.42) в (3.54), получаем следующее выражение для среднего планковского пробега по тормозному поглощению в максвелловской плазме:

$$\begin{aligned} l_{P,ff} &= \frac{\pi\sqrt{6\pi}}{160} \frac{1}{\alpha a_0^5 n_e n_i Z_i^2 \langle g \rangle_M} \left(\frac{T_e}{e^2/a_0} \right)^{7/2} = \\ &= 2.3355 \frac{A^2 T_{e,keV}^{7/2}}{\rho_{g/cc}^2 Z_i^3 \langle g \rangle_M} \text{ см}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

где $\langle g \rangle_M$ — уже введённый выше (3.49) дважды усреднённый гаунт-фактор для тормозных потерь. Отметим, что росселандовский средний пробег существенно превышает планковский пробег,

$$\frac{l_{R,ff}}{l_{P,ff}} = C_{KR} \frac{15}{\pi^4} \frac{\langle g \rangle_M}{\bar{g}_M} = 30.262 \frac{\langle g \rangle_M}{\bar{g}_M}. \quad (3.57)$$

В борновском пределе это отношение составляет почти два порядка, $l_{R,ff}/l_{P,ff} = 97.575$.

3.6 Минимальная оценка росселандова пробега

В описанном ниже приближении отдельной температуры для излучения коэффициент диффузии излучения определяется росселандовым пробегом l_R . Из рассмотренных механизмов взаимодействия излучения с веществом основную трудность при вычислении l_R представляет учет поглощения на связанных электронах многократных ионов средних и тяжелых элементов, т.е. расчет функции $\tilde{k}_{be}(\nu, T_e)$. Во многих случаях, типичных для ИТС, полезной оказывается простая и элегантная минимальная оценка для l_R , основанная на теореме о сумме сил осциллятора (правило сумм Томаса—Райха—Куна), которую легко получить, если пренебречь всеми остальными механизмами поглощения фотонов.

Для связанно-связанного перехода с уровня n на уровень n' (поглощение в узкой линии) сила осциллятора $f_{nn'}$ определяется соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{nn'}(\nu) d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{nn'}, \quad (3.58)$$

где энергия перехода $h\nu_{nn'} = E_n - E_{n'}$ может быть как положительной, так и отрицательной. Отрицательной частоте перехода $h\nu_{nn'} < 0$ соответствует отрицательное значение силы осциллятора $f_{nn'} < 0$. Легко понять, что переходы с отрицательными силами осцилляторов эффективно учитывают вклад индуцированного испускания (отрицательное поглощение в уравнении переноса).

Для связанно-свободных переходов с уровня n в континуум s вводится аналогичное определение дифференциальной силы ос-

циллятора

$$\sigma_{nc}(\nu) = \frac{\pi e^2}{m_e c} \frac{df_{nc}}{d\nu}. \quad (3.59)$$

Правило сумм Томаса—Райхе—Куна, справедливое для всей совокупности электрических дипольных переходов, гласит

$$\sum_{n'} f_{nn'} + \int_{\nu_c}^{\infty} \frac{df_{nc}}{d\nu} d\nu = N_{be}, \quad (3.60)$$

где N_{be} — число связанных электронов в атоме (ионе). Из (3.60) вытекает следующее соотношение для полного (исправленного за индуцированное испускание) коэффициента поглощения на связанных электронах:

$$\int_0^{\infty} \tilde{k}_{be}(\nu) d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} n_{be}; \quad (3.61)$$

здесь n_{be} [см⁻³] — число связанных электронов в единице объёма.

Росселандов пробег определён соотношением

$$l_{R,be} = \int_0^{\infty} \frac{G(x)}{\tilde{k}_{be}(x)} dx, \quad (3.62)$$

где

$$x = \frac{h\nu}{T_e}, \quad G(x) = \frac{15}{4\pi^4} x^4 e^{-x} (1 - e^{-x})^{-2}, \quad (3.63)$$

и предполагается $T_e = T_r$. Для величины $l_{R,be}$ можно сформулировать вариационную задачу на минимум: найти минимальное значение $l_{R,be}$ при произвольном виде функции $\tilde{k}_{be}(x) > 0$ (неприменимо к лазерным средам с инверсной заселённостью, где в отдельных спектральных участках может быть $\tilde{k}_{be}(\nu) < 0$), удовлетворяющей условию (3.61). Нетрудно вычислить, что абсолютный минимум $l_{R,be}$ достигается при

$$\tilde{k}_{be}(x) = k_0 \sqrt{G(x)} \left[\int_0^{\infty} \sqrt{G(x)} dx \right]^{-1}, \quad k_0 = \frac{\pi e^2 h}{m_e c} \frac{n_{be}}{T_e}, \quad (3.64)$$

и составляет

$$\begin{aligned}
 l_{R,be,\min} &= \frac{1}{k_0} \left(\int_0^\infty \sqrt{G} dx \right)^2 = \frac{735}{k_0 \pi^4} \zeta^2(3) = \\
 &= 1.65 \times 10^{-4} \frac{A}{Z - \bar{z}} \frac{T_{keV}}{\rho_{g/cc}} \text{ см}; \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

здесь Z и A — атомные номер и масса ионов плазмы, а \bar{z} — их средняя степень ионизации. Подробный вывод этой минимальной оценки, а также применение правила сумм для получения более реальной оценки $l_{R,be}$ можно найти в оригинальной публикации В.С. Имшенника и др. [51].

В западной литературе аналогичная минимальная оценка для $l_{R,be}$ известна как предел Дайсона (the Dyson limit). Практическая ценность этой оценки для ИТС связана с тем, что в плазме тяжелых элементов присутствуют миллионы спектральных линий, вклад которых очень трудно учесть. В плотной плазме таких элементов (характерной для условий ИТС) реальные значения росселандова пробега оказываются довольно близки (в пределах фактора 2–5) к вычисленному $l_{R,be,\min}$ (подробнее см. [51]).

3.7 Теплопроводность термоядерной плазмы

Один из важнейших механизмов переноса энергии в сплошной среде обусловлен неоднородностями в распределении атомарных частиц по скоростям микроскопического движения, т.е. неоднородностями распределения температуры. Если характерный пространственный масштаб температурных неоднородностей существенно превышает длину свободного пробега соответствующих атомарных частиц, то такой перенос энергии можно описывать в рамках приближения теплопроводности. Приближение теплопроводности основано на первом законе Фика

(А. Fick), который гласит, что плотность потока тепловой энергии q [эрг см⁻² с⁻¹] пропорциональна градиенту температуры ∇T . В плазме первостепенную роль играет перенос энергии тепловыми электронами, для которых закон Фика принимает вид

$$q_e = -\kappa_e \nabla T_e, \quad (3.66)$$

где $\kappa_e > 0$ — коэффициент электронной теплопроводности.

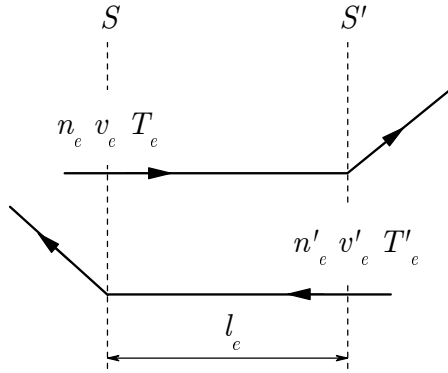


Рис. 3.2. Перенос энергии тепловыми электронами в плазме

Качественную оценку коэффициента электронной теплопроводности в плазме без сильных магнитных полей можно сделать на основе следующих простых соображений, пренебрегая всеми численными коэффициентами типа $3/2$, 4π и т.п. Рассмотрим плоский слой плазмы, в котором электронная температура T_e изменяется вдоль оси x . Выделим в этом слое два поперечных сечения S и S' , разделённых промежутком, ширина которого равна средней длине свободного пробега тепловых электронов l_e (рис. 3.2). Пусть в сечении S объёмная концентрация, средняя тепловая скорость и температура свободных электронов равны, соответственно, n_e, v_e и T_e ; эти же величины в сечении S' будут составлять n'_e, v'_e и T'_e . Электрон, вылетевший из сечения S по

направлению к сечению S' , перенесёт туда свою энергию T_e и, испытав рассеяние, передаст эту энергию окружающей плазме. Аналогично электрон, вылетевший из сечения S' по направлению к сечению S , перенесёт туда энергию T'_e . При этом суммарная плотность потока тепловой энергии между сечениями S и S' будет, очевидно, равна

$$q_e = n_e v_e T_e - n'_e v'_e T'_e. \quad (3.67)$$

Чистый коэффициент теплопроводности определяется из суммарного потока тепловой энергии при дополнительном условии, что суммарная плотность потока тепловых частиц равна нулю, т.е. при условии

$$n_e v_e = n'_e v'_e. \quad (3.68)$$

Учитывая это условие, можем преобразовать соотношение (3.67) к виду

$$q_e = n_e v_e (T_e - T'_e) \approx -n_e v_e l_e \frac{\partial T_e}{\partial x}. \quad (3.69)$$

Сравнивая (3.69) с законом Фика (3.66), получаем следующую общую качественную формулу для коэффициента электронной (или любой другой “молекулярной”, т.е. обусловленной столкновениями на молекулярном уровне) теплопроводности

$$\kappa_e \simeq n_e v_e l_e. \quad (3.70)$$

Среднюю длину свободного пробега l_e тепловых электронов в плазме можно оценить, воспользовавшись общей формулой (2.51) для кулоновской тормозной способности dE_e/dx , где $E_e \simeq m_e v_e^2 \simeq T_e$ — кинетическая энергия рассматриваемого электрона. Учитывая для простоты лишь кулоновское рассеяние электронов на электронах, из (2.51) получаем

$$l_e \simeq \frac{E_e m_e v_e^2}{e^4 n_e L} \simeq \frac{T_e^2}{e^4 n_e L}, \quad (3.71)$$

где L — соответствующий кулоновский логарифм. Подставляя (3.71) в (3.70) и учитывая, что $v_e \simeq \sqrt{T_e/m_e}$, получаем следующую качественную (т.е. с точностью до численного коэффициента) формулу для коэффициента электронной теплопроводности немагнитной максвелловской плазмы:

$$\kappa_e \simeq \frac{v_e T_e^2}{e^4 L} \simeq \frac{T_e^{5/2}}{m_e^{1/2} e^4 L}. \quad (3.72)$$

Строгий количественный расчёт коэффициента электронной теплопроводности в плазме, состоящей из максвелловских электронов и водородоподобных ионов с зарядом $+eZ$, был выполнен Л. Спитцером и Р. Хэрмом (L. Spitzer, R. Härm) [52, 53] и опубликован в 1953 г. При этом были учтены как электрон-электронные, так и электрон-ионные столкновения. Спитцер и Хэрм представили свои результаты в виде

$$\kappa_e = 20 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{T_e^{5/2}}{m_e^{1/2} e^4 Z L} \epsilon \delta_T, \quad (3.73)$$

где множитель $\epsilon \delta_T$ был найден численно для некоторых избранных значений Z . С тех пор формула (3.73) называется формулой Спитцера, или спитцеровской теплопроводностью.

Аналитическая зависимость фактора $\epsilon \delta_T$ от Z была впервые вычислена В.С. Имшенником в 1961 г. [54] методом Чепмена—Энскового в двухполиномиальном приближении по скоростям электронов, а затем, независимо, М. Лампе (M. Lampe) в 1968 г. [55]; позднее этот результат был пересчитан Н.А. Бобровой и П.В. Сасоровым [56] с исправлением незначительной ошибки, вкравшейся в окончательную формулу Имшенника. В научной литературе явная аналитическая формула для множителя $\epsilon \delta_T$ была впервые приведена в работе [57] в виде

$$\epsilon \delta_T = \frac{15\pi}{256} \frac{45z + 433z^2}{9 + 151z + 217z^2}, \quad z = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{Z L_{ei}}{L_{ee}}, \quad (3.74)$$

где L_{ei} и L_{ee} — значения кулоновского логарифма для электрон-ионных и электрон-электронных столкновений соответственно. Отличие между численными результатами работы [52] и формулой (3.74) не превышает 2.5 % ни при каких $Z \geq 1$. Полагая для простоты $L_{ei} = L_{ee} = L$ и объединяя результаты Спитцера—Хэрма и Имшенника, приходим к следующему аналитическому варианту формулы Спитцера

$$\kappa_e = \frac{3 \cdot 5^3}{2^7 \sqrt{\pi}} \frac{1 + \frac{433}{180\sqrt{2}} Z}{1 + \frac{151}{36\sqrt{2}} Z + \frac{217}{288} Z^2} \frac{T_e^{5/2}}{m_e^{1/2} e^4 L}. \quad (3.75)$$

Строгое вычисление кулоновского логарифма L выходит за рамки упомянутых выше работ [52, 54, 56] (где L считалось известной константой) и не может быть выполнено аналитически. На практике обычно используется та или иная аппроксимационная формула. Для электрон-ионных столкновений можно предложить следующий вариант такой аппроксимации. Исходим из формулы

$$L = \ln \frac{v/\omega_p}{\left[(Ze^2/m_e v^2)^2 + (\hbar/2m_e v)^2 \right]^{1/2}}, \quad (3.76)$$

которая объединяет формулы Бора—Крамерса и Линдхарда—Ларкина (см. параграф 2.8.1) для кулоновского логарифма, описывающего взаимодействие быстрого иона с зарядом $+eZ$ и скоростью v с неподвижными электронами плазмы (постоянную 1.123 в боровском пределе полагаем равной 1) по рецепту, использованному в аппроксимационной формуле (2.97). Если теперь перейти в систему покоя иона, то та же формула даст кулоновский логарифм для рассеяния электронов плазмы, движущихся со скоростью v , на неподвижном ионе $+eZ$. Ясно, что при максвелловском распределении электронов и ионов по скоростям относительная скорость v в формуле (3.76) должна быть заменена на величину порядка тепловой скорости $(T_e/m_e)^{1/2}$ лёгких электронов.

Следуя аргументам, сформулированным в работах [52, 53, 57], мы заменим адиабатический прицельный параметр v/ω_p в числителе формулы (3.76) на дебаевский радиус λ_D (т.е. на радиус статической экранировки в плазме), а энергию $\frac{1}{2}m_e v^2$ в знаменателе — на её среднее значение $\frac{3}{2}T_e$. Дебаевский радиус следует вычислять по общей формуле

$$\lambda_D^{-2} = \frac{4\pi n_e e^2}{T_e} + \frac{4\pi n_i Z^2 e^2}{T_i}, \quad (3.77)$$

которая описывает квазистатическую экранировку пробного заряда как электронами, так и ионами плазмы; здесь T_i и n_i — температура и объёмная концентрация ионов. Положив для простоты $T_i = T_e$ и используя условие электронейтральности $Zn_i = n_e$, приходим к аппроксимации для кулоновского логарифма

$$L \approx L_{ei} = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{4\pi e^6} \frac{T_e^3 / [(Z+1)n_e]}{Z^2 + \frac{3}{4}(\hbar^2/m_e e^4)T_e}, \quad (3.78)$$

которая вполне адекватна для вычисления коэффициента спитцеровской теплопроводности по формулам (3.73), (3.75). Подчеркнём, что формула (3.78) даёт значение кулоновского логарифма лишь с точностью до множителя порядка единицы под знаком логарифма. Если же оказывается, что $L \lesssim 1$, то это означает, что мы вышли за рамки применимости теоретической модели, использованной при выводе формул (3.73), (3.75).

Контрольные вопросы

1. Почему ТЯ зажигание DT- и DD-топлива в условиях теплового равновесия с излучением не эффективно?
2. Что происходит с частотой фотона ν при рассеянии на покоящемся свободном электроне?
3. Как эволюционирует спектр изначально монохроматического излучения с частотой ν в процессе рассеяния на горячих свободных электронах с температурой T ?

4. Какая функция распределения фотонного газа по частоте даёт равновесное (стационарное) решение уравнения Компанейца?
5. Как из уравнения Компанейца оценить характерное время установления теплового равновесия между фотонами и свободными электронами за счёт комптоновского рассеяния?
6. Почему в формуле для эффективного сечения тормозного поглощения фотона $h\nu$ в горячей плазме появляется зависимость от плотности и температуры плазмы? Какова эта зависимость?
7. Как зависит от параметров плазмы удельная мощность потерь энергии тормозным излучением в оптически тонком пределе? В оптически толстом пределе?
8. Чем Росселандов средний пробег излучения отличается от планковского?
9. Как спитцеровский коэффициент электронной теплопроводности зависит от температуры и плотности плазмы? Чем объясняется его температурная зависимость?

Глава 4

Основные критерии и режимы термоядерного горения

Для осуществления управляемой ТЯ реакции необходимо выполнить ряд условий, которым должны удовлетворять физические параметры ТЯ плазмы. Эти условия нашли отражение в нескольких общепринятых критериях УТС. Различаются три таких критерия: критерий Лоусона, критерий инерциального удержания, и критерий зажигания.

Критерий Лоусона, понимаемый в широком смысле, представляет собой условие, которому должны удовлетворять параметры ТЯ плазмы в ТЯ реакторе, чтобы последний мог функционировать на условиях “энергетической самокупаемости”. Этот критерий относится к ТЯ реактору с любым способом удержания плазмы, т.е. применим как к ИТС, так и к системам с магнитным удержанием.

Критерий инерциального удержания является фундаментальным критерием ИТС: он фактически определяет минимально допустимый размер (или массу) термоядерного топлива. Если проводить аналогию с цепной реакцией ядерного деления, то

можно сказать, что критерий инерциального удержания определяет “критическую массу” ТЯ топлива (на самом деле критическое значение в обоих случаях имеет не масса топлива, а параметр $\langle \rho r \rangle$).

Критерий зажигания определяет, в каком объёме и до какой температуры необходимо нагреть ТЯ плазму, чтобы в ней началось самоподдерживающееся ТЯ горение. Он зависит от того, какая именно мода (или способ) ТЯ зажигания рассматривается. Разным модам зажигания будут, вообще говоря, соответствовать разные критерии зажигания.

4.1 Критерий Лоусона

4.1.1 Исходная форма критерия Лоусона

Критерий, сформулированный Дж. Д. Лоусоном (J.D. Lawson) в его оригинальной работе [58], относится к идеализированному ТЯ реактору, работающему в импульсном режиме. Способ удержания ТЯ плазмы не конкретизируется. Предполагается, что в начале каждого импульса некоторый объём плазмы V мгновенно нагревается до рабочей температуры T , удерживается при этой температуре в течение некоторого времени t_{con} , а затем быстро остывает. За время удержания t_{con} в плазме происходит некоторое количество реакций синтеза, в результате которых выделяется ТЯ энергия $E_{fus} = W_{fus} V t_{con}$, где W_{fus} [эрг см⁻³ с⁻¹] — средняя по объёму удельная мощность ТЯ энерговыделения. Лоусон предполагал, что вся эта энергия практически мгновенно уходит на стенки реактора, и в самой плазме ничего не остается. Другими словами, он считал, что ТЯ плазма прозрачна для всех продуктов реакций синтеза.

Далее Лоусон принял во внимание, что в процессе удержания горячая плазма теряет энергию за счет теплового излучения со средней удельной мощностью W_r [эрг см⁻³ с⁻¹], и для поддержания рабочей температуры T эти потери должны быть

компенсированы соответствующим внешним нагревом. При этом он предположил, что всеми другими возможными механизмами охлаждения (как, например, теплопроводностью) можно пренебречь. В результате полная энергия внешних источников, затраченная на начальный нагрев плазмы и её поддержание при рабочей температуре в течение одного цикла, составляет

$$E_{ext} = \left[\frac{3}{2}(1 + \bar{Z})nT + W_r t_{con} \right] V, \quad (4.1)$$

где $n = \sum n_i$ [см⁻³] — суммарная концентрация всех ионов ТЯ топлива, а $\bar{Z} = \sum n_i Z_i / \sum n_i$ — средний атомный номер ядер топлива; ТЯ плазма предполагается полностью ионизованной, так что концентрация свободных электронов равна $n_e = \bar{Z}n$.

Предполагая далее, что всю энергию $E_{fus} + E_{ext}$, выброшенную в течение одного цикла на стенки ТЯ реактора, удаётся утилизировать с некоторым коэффициентом трансформации $\eta \approx \frac{1}{3}$, энергетический порог работоспособности нашего реактора можно записать в простом виде

$$\eta(E_{fus} + E_{ext}) \geq E_{ext}. \quad (4.2)$$

Данное условие означает, что после полной утилизации энергии ТЯ плазмы из одного цикла со временем удержания t_{con} нам хватает энергии на поддержание следующего такого же цикла. При этом η есть эффективность преобразования именно в тот вид энергии, который уже в чистом виде поступает в плазму ТЯ реактора.

Удельная мощность ТЯ энерговыделения W_{fus} для бинарной реакции синтеза $Z_1 + Z_2$ записывается в виде

$$W_{fus} = E_{12} \alpha(1 - \alpha) n^2 \langle \sigma v \rangle_{12}, \quad (4.3)$$

где E_{12} — энергия, выделяющаяся в одной реакции синтеза, α — парциальная концентрация ядер сорта 1, определённая таким образом, что $n_1 = \alpha n$, $n_2 = (1 - \alpha)n$; скорость реакции $\langle \sigma v \rangle_{12}$ есть

известная функция температуры T . В случае однокомпонентного топлива (как, например, DD-топливо) множитель $\alpha(1-\alpha)$ в (4.3) следует заменить на $\frac{1}{2}$.

Удельная мощность лучистого охлаждения W_r оценивается в предположении, что основной вклад в лучистые потери даёт тормозное излучение, для которого ТЯ плазма полностью прозрачна. Тогда, воспользовавшись формулой (3.48), получаем

$$W_r = W_{ff} = A_{ff} T^{1/2} n_e \sum n_i Z_i^2 = A_{ff} \bar{Z} \langle Z^2 \rangle n^2 T^{1/2}, \quad (4.4)$$

где постоянная $A_{ff} = 5.36 \times 10^{-24}$ [эрг см³ с⁻¹ кэВ^{-1/2}], а $\langle Z^2 \rangle = \sum n_i Z_i^2 / \sum n_i$. С помощью выражений (4.1), (4.3) и (4.4) критерий (4.2) легко преобразуется к виду

$$nt_{con} \geq \frac{\frac{3}{2}(1 + \bar{Z})T}{E_{12}(\eta^{-1} - 1)^{-1} \alpha(1 - \alpha) \langle \sigma v \rangle_{12} - A_{ff} \bar{Z} \langle Z^2 \rangle T^{1/2}}. \quad (4.5)$$

Критерий Лоусона (4.5) гласит, что для запуска ТЯ реактора необходимо обеспечить некоторое минимальное значение произведения nt_{con} , которое зависит от состава ТЯ топлива и его температуры. На первый взгляд, этот критерий является чисто локальным, и размер ТЯ плазмы в нём не участвует. Однако нетрудно понять, что характерный размер плазмы может войти в критерий Лоусона неявно через время удержания t_{con} .

Критерию Лоусона можно удовлетворить лишь в том интервале температур, где знаменатель в правой части (4.5) положителен. Последнее, вообще говоря, возможно не для всех предлагаемых видов ТЯ топлива. Зная общий характер зависимости скорости ТЯ реакций $\langle \sigma v \rangle_{12}$ от температуры T , легко увидеть, что правая часть неравенства (4.5), рассматриваемая как функция одной только температуры T , имеет минимум при некотором значении $T = T_{\min}$ (рис. 4.1). Последний соответствует абсолютному минимуму $nt_{con} = (nt_{con})_{\min}$, который зависит только от химического состава топлива. Значения T_{\min} и $(nt_{con})_{\min}$ для конкретных видов ТЯ топлива обсуждаются в следующем параграфе.

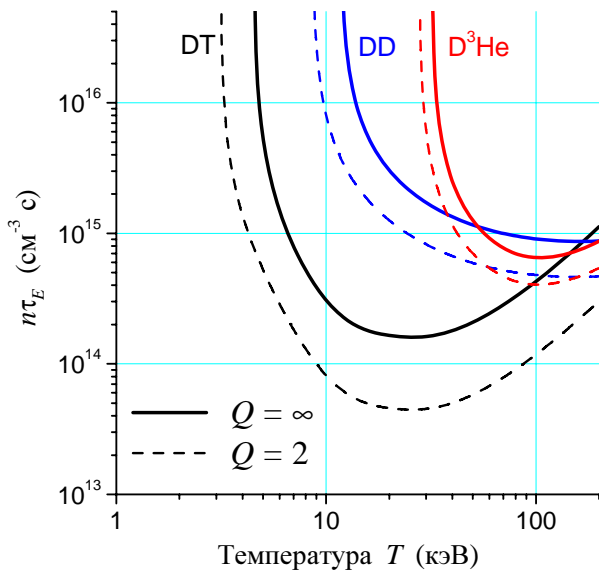


Рис. 4.1. Критерий Лоусона для DT- и DD-топлива

4.1.2 Критерий Лоусона для стационарного горения с полным поглощением заряженных продуктов

Когда Дж. Д. Лоусон сформулировал свой критерий в 1957 г., он имел в виду управляемый ТЯ синтез с магнитным, а не с инерциальным удержанием. Прогресс на пути осуществления МТС, достигнутый за прошедшие годы, привёл к тому, что некоторые из допущений, сделанных Лоусоном, устарели. Время удержания плазмы в токамаках достигло многих сотен и тысяч секунд [59, 60], что существенно превышает характерное время потерь энергии механизмом теплопроводности, ролью которой Лоусон пренебрег. Кроме того, в типичных условиях магнитного ТЯ реактора заряженные продукты реакций синтеза (3.5-мэвные альфа-частицы для DT-реакции) удерживаются магнитным по-

лем и оставляют практически всю свою энергию в ТЯ плазме, обеспечивая тем самым её самонагрев. В свете этих изменений для современного состояния УТС более адекватной представляется следующая формулировка критерия Лоусона.

Предположим, что ТЯ реактор работает в стационарном режиме при некоторой температуре плазмы T . В общем случае, чтобы компенсировать охлаждение плазмы, к реактору может подводиться внешний нагрев со средней (по объёму плазмы) удельной мощностью W_{ext} [эрг см⁻³ с⁻¹]. Одной из основных характеристик такого реактора является коэффициент усиления, определённый как отношение

$$Q = \frac{W_{fus}}{W_{ext}} \quad (4.6)$$

средней удельной мощности полного ТЯ энерговыделения W_{fus} к удельной мощности внешнего нагрева W_{ext} . Будущий реактор ИТЕР должен работать при $Q \gtrsim 10$ [59]. Условие зажигания в МТС определяется как возможность стационарного режима при $W_{ext} = 0$, т.е. соответствует значению $Q = \infty$.

Как и ранее, удельная мощность ТЯ энерговыделения W_{fus} и скорость потерь на тормозное излучение W_r определяются, соответственно, выражениями (4.3) и (4.4). В дополнение к этим двум процессам учтём роль всех других возможных механизмов охлаждения ТЯ плазмы чисто феноменологически, в так называемом τ -приближении:

$$W_{dif} = \frac{3}{2} \frac{(1 + \bar{Z}) nT}{\tau_E}. \quad (4.7)$$

Как правило, основной вклад в эти дополнительные потери обусловлен выносом энергии на стенки реактора за счет диффузии частиц плазмы поперёк магнитного поля. Поскольку для скорости таких энергетических потерь не существует надёжной универсальной теоретической оценки, они описываются введением так называемого *времени энергетического удержания*: τ_E есть

время, за которое ТЯ плазма теряет энергию, равную внутреннему энергосодержанию $\frac{3}{2}(1 + \bar{Z})nT$, за счёт всех механизмов охлаждения кроме тормозного излучения.

Предполагая далее, что вся энергия заряженных продуктов ТЯ реакций, составляющая долю f_c от полного ТЯ энерговыделения, поглощается в плазме реактора, можем записать условие баланса мощности нашего стационарного ТЯ реактора в виде

$$W_{ext} + f_c W_{fus} = W_{ff} + W_{dif}. \quad (4.8)$$

Подставляя $W_{ext} = W_{fus}/Q$ и используя выражения (4.3), (4.4) и (4.7), мы легко преобразуем условие стационарности (4.8) к виду

$$n\tau_E = \frac{\frac{3}{2}(1 + \bar{Z})T}{E_{12}(Q^{-1} + f_c)\alpha(1 - \alpha)\langle\sigma v\rangle_{12} - A_{ff}\bar{Z}\langle Z^2\rangle T^{1/2}}, \quad (4.9)$$

который совпадает с исходной формой критерия Лоусона (4.5), если в нем заменить множитель $(\eta^{-1} - 1)^{-1}$ на $Q^{-1} + f_c$.

На рис. 4.1 изображена зависимость (4.9) произведения $n\tau_E$ от температуры плазмы T для трёх видов ТЯ топлива: для эквимолярной смеси дейтерия с тритием (DT-топливо), в которой протекает одна реакция (1.26), для эквимолярной смеси дейтерия с гелием-3 (D³He-топливо), в которой протекает одна реакция (1.29), и для чистого дейтерия (DD-топливо), в котором протекают все четыре реакции (1.26)–(1.29). Соответствующие значения различных параметров, входящих в формулу (4.9), перечислены в табл. 4.3. Для DD-топлива сделано наиболее благоприятное предположение, что первичные продукты T и ³He реакций D+D полностью сгорают в последующих актах слияния с ядрами дейтерия. Абсолютный минимум произведения $n\tau_E$, который необходимо обеспечить для реализации самоподдерживающейся реакции при $Q = \infty$, составляет $(n\tau_E)_{\min} = 1.6 \times 10^{14}$ см⁻³ с для DT-топлива, $(n\tau_E)_{\min} = 6.5 \times 10^{14}$ см⁻³ с для D³He-топлива и $(n\tau_E)_{\min} = 8.7 \times 10^{14}$ см⁻³ с для DD-топлива. При наличии стороннего нагрева, соответствующего конечным значениям параметра $Q < \infty$, пороговое значение $n\tau_E$ снижается, как это видно

при сравнении штриховых ($Q = 2$) и сплошных ($Q = \infty$) кривых на рис. 4.1.

Таблица 4.3. Параметры критерия Лоусона для четырёх видов термоядерного топлива

Топливо	$D_{(1-\alpha)}T_\alpha$	$D_{(1-\alpha)}{}^3\text{He}_\alpha$	DD	$H_{(1-\alpha)}B_\alpha$
α	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0.0821
E_{12} [МэВ]	17.59	18.35	43.24	8.68
f_c	0.20	1.0	0.618	1.0
\bar{Z}	1	1.5	1	1.3284
$\langle Z^2 \rangle$	1	2.5	1	2.9704
T_{\min} [кэВ]	26	105	160	—
$(n\tau_E)_{\min}$ [см ⁻³ с]	1.6×10^{14}	6.5×10^{14}	8.7×10^{14}	—

Здесь следует отметить, что при выводе критерия Лоусона неявно предполагалось полное отсутствие в топливе “ядерной золы” в виде гелия-4 и водорода (полагая, что эти продукты достаточно быстро выводятся из зоны реакции), а также возможных примесей других более тяжелых элементов. Главная опасность таких примесей состоит в возможном резком усилении потерь энергии на тормозное излучение благодаря наличию произведения $\bar{Z}\langle Z^2 \rangle$ в правой части (4.4). Так присутствие примеси железа в количестве 1 % по числу атомов повышает пороговое значение $n\tau_E$ в DT-топливе в 1.5 раза, а в DD-топливе — в 2.5 раза.

По аналогичной причине резко затруднено осуществление

управляемой ТЯ реакции (1.43) в НВ-топливе, так как присутствие бора с $Z = 5$ ведёт к сильному возрастанию потерь на тормозное излучение. Оптимальное соотношение ядер В и Н, при котором отношение тормозных потерь к ТЯ энерговыделению минимально, составляет $1 : 5\sqrt{5}$ ($\alpha = 0.0821$). Но даже при этом оптимальном соотношении критерий Лоусона (4.9) не может быть выполнен ни при какой температуре топлива, если принять значение $Q = \infty$. Заметим, что при $T \gtrsim 100$ кэВ использованная выше формула (3.48) уже существенно (на $\gtrsim 25$ %) занижает скорость тормозных потерь, поскольку она не учитывает релятивистский характер движения электронов плазмы [61]. В качестве возможных путей достижения положительного баланса можно, например, указать возможность реализации НВ-плазмы с сильно отличающимися температурами электронов и ионов и использование стороннего нагрева, соответствующего не слишком высоким значениям параметра Q .

4.1.3 Температура зажигания

Условие положительности теплового баланса в ТЯ плазме приводит нас к понятию температуры зажигания стационарной (или квазистационарной) ТЯ реакции. В простейших предположениях, использованных при выводе критерия Лоусона, температура зажигания $T = T_{ig,ff}$ не зависит от плотности и размеров плазмы и определяется условием баланса

$$E_{12} f_c \alpha (1 - \alpha) \langle \sigma v \rangle_{12} = A_{ff} \bar{Z} \langle Z^2 \rangle T^{1/2} \quad (4.10)$$

между удельными мощностями ТЯ нагрева и лучистого охлаждения тормозным излучением. Напомним, что при этом предполагается, что: 1) вся энергия заряженных продуктов реакций синтеза поглощается в плазме, и 2) единственным механизмом охлаждения является тормозное излучение, для которого ТЯ плазма полностью прозрачна. При $T < T_{ig,ff}$ нагрев плазмы заряженными продуктами ядерных реакций не может компен-

сировать объёмные потери на тормозное излучение, и без дополнительного нагрева температура плазмы будет падать. Зависимость от плотности плазмы в определении $T_{ig,ff}$ выпадает благодаря тому, что обе удельные мощности, как ТЯ нагрева, так и тормозных потерь, пропорциональны квадрату плотности. Значения температуры зажигания $T_{ig,ff}$, вычисленные для трёх наиболее интересных видов ТЯ топлива, приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4. Температура зажигания, определяемая условием (4.10), для трёх видов термоядерного топлива

Топливо	DT	DD	D ³ He
$T_{ig,ff}$ [кэВ]	4.5	11.7	31.8

4.2 Критерий инерциального удержания

В инерциальном УТС разгоревшееся ТЯ топливо ничем не удерживается, и основная доля ТЯ реакций протекает на фоне быстрого гидродинамического разлёта плазмы: ТЯ горение носит характер вспышки (или микровзрыва). Важной характеристикой эффективности одной такой вспышки является относительная *доля выгорания* ТЯ топлива $0 \leq f_b \leq 1$. Сравнительно высокими и практически интересными считаются значения $f_b \gtrsim 0.3$. Необходимость достижения достаточно высокой доли выгорания f_b приводит нас к критерию инерциального удержания, который накладывает универсальное ограничение снизу на значение *параметра удержания* $\langle \rho r \rangle$ ТЯ топлива на момент его возгорания.

4.2.1 Простая оценка

Допустим, что в некотором объёме V ТЯ топлива с характерной плотностью ρ и характерным поперечным размером R развивается ТЯ вспышка, в процессе которой основная доля реакций синтеза протекает при характерной температуре T . Если ТЯ плазма ничем не удерживается, то время её существования определяется характерным временем свободного гидродинамического разлёта

$$t_{con} \simeq \frac{R}{c_s}, \quad (4.11)$$

где $c_s = c_s(T)$ — скорость распространения звука.

В общем случае произвольной смеси реагирующих компонент топлива, в которой может реализовываться довольно разветвлённая цепочка реакций синтеза, трудно предложить простое и универсальное определение доли выгорания. Рассмотрим два простейших частных случая: эквимольярную смесь двухкомпонентного топлива, где существенна лишь одна реакция $Z_1 + Z_2$, и однокомпонентное топливо с одной существенной реакцией $Z_1 + Z_1$. Полное число реакций синтеза, произошедших во всей массе топлива, составит соответственно величину порядка

$$N_{fus} \simeq \begin{cases} \frac{1}{4} V n^2 \langle \sigma v \rangle_{12} t_{con}, & Z_1 + Z_2, \\ \frac{1}{2} V n^2 \langle \sigma v \rangle_{11} t_{con}, & Z_1 + Z_1, \end{cases} \quad (4.12)$$

где $n = \rho / \bar{m}_i$ [см^{-3}] — суммарное число ядер всех компонент топлива в единице объёма, $\bar{m}_i = \sum_i n_i m_i / \sum_i n_i$ — средняя масса ядер топлива, n_i [см^{-3}] и m_i — соответственно объёмная концентрация и масса ядер сорта i . Полному выгоранию топлива будет, очевидно, соответствовать полное возможное число реакций синтеза, которое в обоих случаях составит $N_{fus,tot} = \frac{1}{2} V n$. Доля выгорания естественным образом определяется как отношение

$$f_b = \frac{N_{fus}}{N_{fus,tot}} \simeq \frac{\rho R}{H_b}, \quad (4.13)$$

где для *параметра выгорания* $H_b = H_b(T)$ из соотношений (4.11) и (4.12) получается выражение

$$H_b \simeq \begin{cases} \frac{2\bar{m}_i c_s}{\langle \sigma v \rangle_{12}}, & Z_1 + Z_2, \\ \frac{\bar{m}_i c_s}{\langle \sigma v \rangle_{11}}, & Z_1 + Z_1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Формула (4.13) означает, что для достижения ощутимой доли выгорания $f_b \sim 1$ в некоторой массе топлива необходимо обеспечить достаточно высокое значение параметра удержания ρR , приближающееся по величине к значению H_b . В этом и состоит суть критерия инерциального удержания. Параметр H_b зависит лишь от температуры плазмы T и имеет минимум при некотором её значении, которое может рассматриваться как оптимальная температура горения. Отметим, что, в отличие от критерия Лоусона, для вывода критерия инерциального удержания мы не делали никаких предположений ни о степени поглощения энергии быстрых продуктов реакций синтеза, ни о механизмах охлаждения ТЯ плазмы.

4.2.2 Локальная доля выгорания

Полученная выше оценка $f_b \approx \rho R / H_b$ нуждается в уточнении уже хотя бы потому, что при $\rho R > H_b$ она даёт абсурдные значения $f_b > 1$. Чтобы избавиться от этого недостатка, необходимо учесть, что в процессе выгорания топлива падает относительная концентрация главных реагентов.

Динамику выгорания топлива на фоне гидродинамического разлёта проще всего учесть, рассмотрев сравнительно малый “лагранжев” объём топлива $V = V(t)$, внешняя граница которого как бы прикреплена к фиксированным частицам топлива. В процессе движения плазмы этот объём будет деформироваться и изменяться по величине. Если бы не было ядерных реакций, то полное число ядер каждого сорта в объёме V сохранялось бы.

Для простоты предположим, что на фоне протекающих реакций в этом объёме сохраняется полная масса вещества ρV . Другими словами, учтём превращение ядерного топлива в ядерную “золу”, но будем пренебрегать возможным выносом массы быстрыми продуктами реакций из рассматриваемого объёма V .

Рассмотрим сначала случай эквимольной смеси двухкомпонентного топлива. Чтобы учесть процесс выгорания, введём относительную концентрацию непрореагировавшего топлива $X = X(t) \leq 1$, определённую соотношением

$$n_1(t) = n_2(t) = \frac{\rho(t)}{2\bar{m}_i} X(t). \quad (4.15)$$

На начальном этапе (при $t \rightarrow -\infty$), пока не начались ядерные реакции, $X = X(-\infty) = 1$. Далее, по мере превращения топлива в “золу”, значение X будет уменьшаться. Полному выгоранию соответствует, очевидно, значение $X = 0$. Если горение отсутствует, то объёмные концентрации компонентов $n_i(t)$ изменяются в процессе движения пропорционально плотности вещества $\rho(t)$, а значение X остаётся постоянным.

Легко получить дифференциальное уравнение, описывающее изменение X во времени. Действительно, за малое время dt полное число ядер каждого из двух компонентов топлива в объёме V уменьшается на число произошедших в этом объёме реакций слияния $Z_1 + Z_2$,

$$d(n_1 V) = d(n_2 V) = -n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle_{12} V dt. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.15) в (4.16) и учитывая, что $d(\rho V)/dt = 0$, получаем

$$\frac{dX}{dt} = -X^2 \frac{\rho}{2\bar{m}_i} \langle \sigma v \rangle_{12}. \quad (4.17)$$

Уравнение (4.16) легко решается в квадратурах. Полная доля выгорания в рассматриваемом лагранжевом элементе топлива определяется значением $X(t)$ при $t \rightarrow +\infty$:

$$f_b = 1 - X(\infty) = \frac{\Gamma_{12}}{1 + \Gamma_{12}}, \quad (4.18)$$

где

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{2\bar{m}_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \langle \sigma v \rangle_{12} dt. \quad (4.19)$$

Формула (4.18), в отличие от оценки (4.13), имеет вполне корректную структуру: при любых возможных значениях $0 \leq \Gamma_{12} < < \infty$ доля выгорания f_b остаётся в пределах $0 \leq f_b < 1$.

В однокомпонентном топливе относительная концентрация X определяется соотношением

$$n(t) = \frac{\rho(t)}{m_i} X(t) \quad (4.20)$$

и подчиняется уравнению

$$\frac{dX}{dt} = -X^2 \frac{\rho}{m_i} \langle \sigma v \rangle_{11}. \quad (4.21)$$

Доля выгорания f_b дается тем же выражением (4.18), в котором Γ_{12} следует заменить на

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{m_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \langle \sigma v \rangle_{11} dt. \quad (4.22)$$

4.2.3 Доля выгорания при изотермическом разлёте сферической массы топлива

Чтобы вычислить интеграл в правой части (4.19) и (4.22), необходимо решить уравнения гидродинамики и найти зависимость плотности ρ и температуры T от времени в каждом лагранжевом элементе разлетающегося топлива. В общем случае эта задача решается численно. Мы же воспользуемся известным авторитетным решением для изотермического разлёта сферической массы газа [1], которое позволяет получить достаточно адекватную аналитическую оценку доли выгорания f_b . Выбор именно

этого автомодельного решения обусловлен спецификой рассматриваемой задачи: нас интересует динамика разлёта в фазе развитого горения, когда температура топлива в процессе развития ТЯ вспьшки выходит на максимальные значения и в течение некоторого промежутка слабо зависит от времени. А поскольку скорость ТЯ реакций сильно зависит от температуры, можно ожидать, что именно в этой фазе происходит основное выгорание топлива.

Динамика разлёта сферической массы газа (ТЯ плазмы) в простейшем случае описывается двумя уравнениями идеальной одномерной гидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u r^2) = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4.24)$$

где $\rho(t, r)$, $u(t, r)$ и $p(t, r)$ — соответственно плотность, скорость и давление разлетающегося газа. Предположив, что температура плазмы T постоянна в пространстве и во времени, мы избавляем себя от необходимости решать уравнение энергии. Давление p в этом случае простейшим образом выражается через плотность ρ ,

$$p = \frac{p_0}{\rho_0} \rho, \quad (4.25)$$

где ρ_0 и p_0 — значения в центре сферы в момент $t = 0$. Будем рассматривать моменты времени $t \geq 0$, полагая для простоты, что при $t = 0$ температура быстро выходит на постоянное значение T , и что именно в этот момент начинается процесс интенсивного горения и разлёта; начальная скорость разлёта $u(0, r) = 0$.

Автомодельное решение строится переходом от переменных t, r к переменным t, ξ , где

$$\xi = \frac{r}{R(t)}, \quad (4.26)$$

а $R(t)$ — характерный размер разлетающейся плазмы, который является неизвестной функцией времени. Величины R и t также удобно обезразмерить с помощью соотношений

$$R(t) = R_0 \mathcal{R}(\tau), \quad \tau = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} = \frac{c_s t}{R_0}. \quad (4.27)$$

Здесь $c_s = \sqrt{p_0/\rho_0}$ — изотермическая скорость звука, которая, как и температура T , постоянна в пространстве и времени. В этих переменных искомое решение уравнений (4.23), (4.24) имеет вид

$$u(t, r) = \frac{r}{R} \frac{dR}{dt} = c_s \xi \frac{d\mathcal{R}}{d\tau}, \quad (4.28)$$

$$\rho(t, r) = \frac{\rho_0}{\mathcal{R}^3} \exp(-\xi^2), \quad (4.29)$$

при условии, что функция $\mathcal{R}(\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mathcal{R}}{d\tau} = 2\sqrt{\ln \mathcal{R}} \quad (4.30)$$

с начальным условием $\mathcal{R}(0) = 1$. Решение (4.28)–(4.30) принадлежит к широкому классу автомодельных решений с линейной зависимостью скорости u от радиуса r [62, гл. IV, § 15]. В этом классе автомодельная переменная ξ является лагранжевой, т.е. фиксированному значению ξ соответствует фиксированная частица газа.

Поскольку в рассматриваемом гидродинамическом решении плотность имеет определённый (гауссовский) профиль по радиусу, необходимо в первую очередь вычислить значение параметра удержания

$$\langle \rho r \rangle = \int_0^\infty \rho dr \quad (4.31)$$

в момент $t = 0$, от которого, как мы считаем, начинается процесс горения и разлёта. Подставляя (4.29) с $\mathcal{R}(0) = 1$ в (4.31),

получаем

$$\langle \rho r \rangle_0 = \rho_0 R_0 \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \rho_0 R_0. \quad (4.32)$$

Формулы (4.18), (4.19) позволяют вычислить долю выгорания $f_{b\xi}$ в фиксированном лагранжевом элементе топлива, т.е. при фиксированном значении переменной ξ . Так как температура постоянна, то скорость реакции $\langle \sigma v \rangle_{12}$ [или $\langle \sigma v \rangle_{11}$] выносятся из-под знака интеграла в (4.19) [или в (4.22)], и решение уравнений гидродинамики нам требуется лишь для вычисления интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \rho \langle \sigma v \rangle_{12} dt = \langle \sigma v \rangle_{12} \int_0^{\infty} \rho dt$. Интегрирование выполняется от $t = 0$, поскольку, как уже подчёркивалось, именно в этот момент температура быстро возрастает до значения, соответствующего развитому горению. Подставляя (4.29) в (4.19) и (4.18), получаем

$$f_{b\xi} = \frac{\Gamma_0 e^{-\xi^2}}{1 + \Gamma_0 e^{-\xi^2}}, \quad (4.33)$$

где для двухкомпонентного топлива

$$\Gamma_0 = \frac{\rho_0 R_0 \langle \sigma v \rangle_{12}}{2 \bar{m}_i c_s} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\mathcal{R}^3} = \frac{\langle \rho r \rangle_0 \langle \sigma v \rangle_{12}}{2\sqrt{2} \bar{m}_i c_s}. \quad (4.34)$$

Во второй части равенства (4.34) произведение $\rho_0 R_0$ выражено через параметр удержания $\langle \rho r \rangle_0$, а при вычислении интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\mathcal{R}^3} = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}^3 \sqrt{\ln \mathcal{R}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad (4.35)$$

напрямую использовано дифференциальное уравнение (4.30).

Чтобы найти полную долю выгорания f_b для всего топлива, необходимо усреднить выражение (4.33) по массе разлетающейся сферической конфигурации, т.е. вычислить интеграл

$$f_b = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\Gamma_0 e^{-\xi^2}}{1 + \Gamma_0 e^{-\xi^2}} e^{-\xi^2} \xi^2 d\xi. \quad (4.36)$$

Поскольку этот интеграл аналитически не берётся, для практических применений его вполне достаточно аппроксимировать простой формулой

$$f_b \approx \frac{\Gamma}{1 + \Gamma}, \quad \Gamma = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma_0 \int_0^{\infty} e^{-2\xi^2} \xi^2 d\xi = \frac{\Gamma_0}{2\sqrt{2}}, \quad (4.37)$$

которая правильно передаёт асимптотическое поведение f_b как в пределе $\Gamma_0 \rightarrow 0$, так и в пределе $\Gamma_0 \rightarrow \infty$. Численное интегрирование в (4.36) показывает, что максимальная погрешность аппроксимации (4.37) составляет +18 % при $f_b \approx 0.5$. Окончательно, для доли выгорания получаем приближённую формулу

$$f_b \approx \frac{\langle \rho r \rangle}{\langle \rho r \rangle + H_b}, \quad (4.38)$$

где

$$H_b = H_b(T) = \begin{cases} \frac{8\bar{m}_i c_s}{\langle \sigma v \rangle_{12}}, & Z_1 + Z_2, \\ \frac{4m_i c_s}{\langle \sigma v \rangle_{11}}, & Z_1 + Z_1. \end{cases} \quad (4.39)$$

4.2.4 Параметр выгорания для сферической массы топлива

Таким образом, воспользовавшись точным решением уравнений гидродинамики для изотермического разлёта газовой сферы, мы получили уточнённую формулу (4.39) для параметра выгорания H_b , которая отличается от простой оценки (4.14) дополнительным множителем 4. Последнее означает, что вместо простой оценки (4.11) для эффективного времени инерциального удержания сферической массы топлива радиуса R предпочтительно использовать более точное выражение

$$t_{con} \approx \frac{R}{4c_s}. \quad (4.40)$$

Альтернативные варианты обоснования оценки (4.40) и формулы (4.39) можно найти в [63, 3].

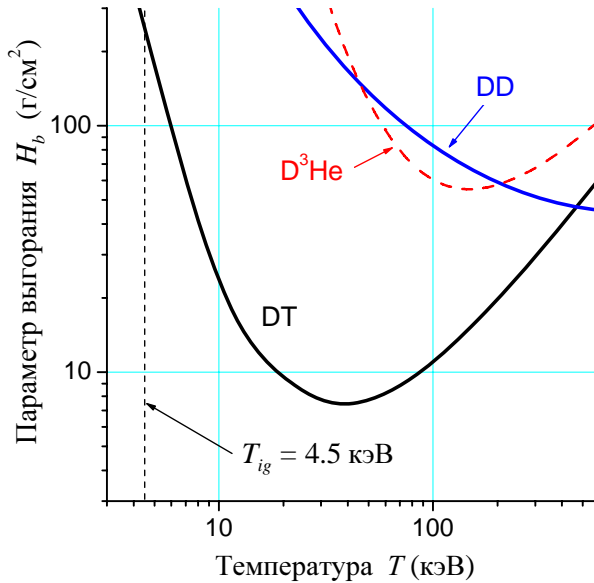


Рис. 4.2. Зависимость параметра выгорания H_b от температуры для трёх видов термоядерного топлива

Зависимость параметра выгорания H_b от температуры T показана на рис. 4.2 для трёх видов ТЯ топлива. Для DT-топлива минимальное значение $H_b \approx 7 \text{ г/см}^2$ достигается при $T \approx 40 \text{ кэВ}$. С точки зрения эффективности инерциального удержания, эта температура является, очевидно, оптимальной температурой горения: повышение температуры до более высоких значений будет сопровождаться падением доли выгорания из-за слишком быстрого разлёта топлива. Подставляя $H_b = 7 \text{ г/см}^2$ в (4.38), видим, что для достижения 30 %-го выгорания необходимо создать конфигурацию топлива со значением параметра удержания $\langle \rho r \rangle \approx 3 \text{ г/см}^2$. Отметим, что простая формула (4.38) с

неплохой точностью передаёт результаты детального численного моделирования ТЯ мишеней и довольно широко используется на практике.

Здесь следует сделать следующую оговорку. Изложенный выше вывод формул (4.38) и (4.39) проделан для изолированной сферической массы топлива, свободно разлетающейся в вакуум. В действительности возможны ситуации, когда разгорающееся ТЯ топливо окружено массивной оболочкой из инертного (негорючего) материала. Такая оболочка может существенно увеличить время удержания по сравнению с тем, что даёт инерция одного лишь топлива, и приближенная формула (4.38) становится излишне пессимистичной. Попытки “подправить” эту формулу добавлением к $\langle \rho r \rangle$ топлива значение $\langle \rho r \rangle$ оболочки к особому успеху не приводят из-за более сложного, чем чисто механическое, взаимодействия разгорающегося топлива с веществом инертной оболочки. В вариантах с внешней оболочкой из тяжелого металла доля выгорания DT-топлива с $\langle \rho r \rangle_{DT} \approx 3 \text{ г/см}^2$ может достигать $f_b \approx 0.7$.

4.2.5 Необходимость сверхвысокого сжатия топлива

С одной стороны, критерий инерциального удержания требует обеспечения достаточно высоких (до несколько г/см^2) значений параметра $\langle \rho r \rangle$. С другой стороны, возможность осуществления контролируемых микровзрывов в лабораторных условиях ИТС накладывает ограничение сверху на массу ТЯ топлива в несколько миллиграммов. Легко понять, что этим двум требованиям можно удовлетворить только тогда, когда ТЯ топливо сжато до очень высоких плотностей, в 1000 и более раз превышающих нормальную плотность DT-льда $\rho_{DT0} = 0.22 \text{ г/см}^3$. Действительно, массу однородной сферы радиуса R можно записать в виде

$$M = \frac{4\pi (\rho R)^3}{3 \rho^2}, \quad (4.41)$$

откуда

$$\rho = 64.7 \left(\frac{\rho R}{1 \text{ г/см}^2} \right)^{3/2} \left(\frac{1 \text{ мг}}{M} \right)^{1/2} \text{ г см}^{-3}. \quad (4.42)$$

При $\rho R = 3 \text{ г/см}^2$ и $M = 1 \text{ мг}$ ДТ-топливо должно быть сжато до плотности $\rho = 340 \text{ г/см}^3$, что в 1500 раз превышает плотность твёрдого состояния при атмосферном давлении. Коэффициенты сжатия по плотности в 1000 и более раз являются экстремальными и требуют для своей реализации особой стратегии.

Тот факт, что в конечном итоге нам нужны высокие значения не самой плотности ρ , а параметра удержания $\langle \rho r \rangle$, диктует и геометрию сжатия, которая должна быть либо сферической, либо цилиндрической. Действительно, при однородном сжатии фиксированной массы параметр $\langle \rho r \rangle$ изменяется как

$$\langle \rho r \rangle \propto \rho^{\nu/(\nu+1)}, \quad (4.43)$$

где $\nu = 0, 1, \text{ и } 2$ для соответственно плоского, цилиндрического и сферического сжатия. Самым эффективным является, очевидно, сферически-симметричное сжатие.

4.3 Теория термоядерной искры в ДТ-топливе

Критерий инерциального удержания фиксирует нижнюю границу для значений параметра $\langle \rho r \rangle$, которая позволяет обеспечить высокую степень выгорания ТЯ топлива на стадии развитого горения, но ничего не говорит о том, какие условия в этом топливе надо создать, чтобы оно вообще загорелось. В этом смысле он является необходимым, но не достаточным критерием ИТС и должен быть дополнен соответствующим критерием зажигания.

Критерий зажигания зависит от того, какая мода (или способ) зажигания выбраны. Так в варианте объёмного (или квазиоднородного) поджига необходимо всю массу ТЯ топлива нагреть до некоторой пороговой температуры зажигания, начиная

с которой самонагрев продуктами реакции разгонит процесс горения до предельной интенсивности. Однако интуитивно понятно, что в общем случае выгоднее поджигать от малой горячей области — ТЯ искры, оставляя основную массу топлива относительно холодной. При этом мы ожидаем, что в правильно созданной искре произойдёт ТЯ вспышка, которая охватит прилегающие слои холодного топлива и вызовет распространение волны горения по всей его массе.

Как у любой искры в химическом топливе, у ТЯ искры есть минимальный размер и минимальная температура, ниже которых искра гаснет, не успевая зажечь окружающее холодное топливо. Чтобы определить пороговые параметры ТЯ искры, нет необходимости исследовать достаточно сложный процесс её образования: достаточно провести параметрический анализ всех теоретически возможных начальных состояний уже готовой искры. Тем не менее, для понимания общепринятой классификации искровых конфигураций ТЯ топлива полезно принять во внимание следующие общие сведения о способах создания таких конфигураций.

В общем случае можно выделить два основных способа создания ТЯ искры:

- а) в процессе сферического (или цилиндрического) сжатия к центру совокупный эффект неоднородного начального распределения удельной энтропии и гидродинамической кумуляции приводит к образованию в центральной области топлива горячей области (hot spot), которая и играет роль ТЯ искры; при этом в момент максимального сжатия, после прохождения отражённой ударной волны, образуется конфигурация, в которой области горячего и холодного топлива имеют почти одинаковое давление: в этом случае говорят об *изобарической искре*; именно по этой схеме должно быть впервые продемонстрировано зажигание на установках NIF и LMJ;

- б) сначала всё ТЯ топливо сжимается более или менее однородно до необходимых значений параметра $\langle \rho r \rangle$, оставаясь при этом относительно холодным; затем, в момент максимального сжатия, в предполагаемую область ТЯ искры очень быстро (по сравнению со скоростью гидродинамического разлёта) впрыскивается необходимая порция энергии, чтобы осуществить локальный нагрев в малой доле топлива: это вариант так называемого *быстрого поджига* (fast ignition) — альтернативное направление ИТС, впервые сформулированное на реалистичной основе для ЛТС в 1994 г. [64]; в этом случае возникает *изохорическая искра* — конфигурация, в которой горячее и холодное топливо имеют почти одинаковую плотность, но сильно различающиеся температуру и давление.

В первую очередь займёмся определением параметров ТЯ искры для наиболее благоприятного варианта топлива — эквимольной DT-смеси, чему и посвящен данный раздел. Если после этого задаться вопросом, как эти параметры изменяются при переходе к DD- или D³He- топливу, то быстро выясняется, что искровая мода зажигания этих медленно горящих видов топлива вряд ли может представить практический интерес для управляемого ТЯ синтеза. Физическая причина состоит в том, что, подобно параметру выгорания H_b , пороговое значение $\langle \rho r \rangle$ искры как в чистом дейтерии, так и в D³He смеси, по крайней мере на порядок превышает соответствующее значение для DT-топлива. Если к этому добавить существенное (тоже почти на порядок) возрастание необходимой пороговой температуры, то начальная энергия искры, которая при фиксированной плотности максимального сжатия пропорциональна $\langle \rho r \rangle^3 T$, должна быть увеличена на три-четыре порядка, что делает её практически не интересной для ИТС. Более практично использовать искровой запал из DT-топлива, размещённый внутри сжатой массы DD или D³He.

4.3.1 Основные предположения и критерий зажигания

Довольно очевидно, что в условиях ИТС, когда сжатие ТЯ топлива осуществляется посредством имплозии, оптимальный момент зажигания приходится на момент максимального сжатия, когда вещество в области ТЯ искры остановилось и “приготовилось” перейти к фазе расширения. Именно в этот момент достигается максимальное значение параметра $\langle \rho r \rangle$ (возможность повторного сжатия топлива на стадии интенсивного горения здесь не рассматривается). Исходя из этого, ниже будем считать, что начальная конфигурация искры задана именно в момент максимального сжатия.

В общем случае, чтобы рассчитать развитие процесса и определить, загорается данная конфигурация или нет, необходимо численно решить систему уравнений в частных производных, описывающих гидродинамическое движение, ТЯ горение и перенос энергии всеми существенными механизмами. Это, однако, совсем не обязательно для выяснения качественной картины и получения вполне удовлетворительных количественных оценок. Сделав ряд упрощающих предположений, мы сведём задачу определения границы зажигания и вычисления минимального размера ТЯ искры к несложным алгебраическим соотношениям.

Пусть в момент максимального сжатия вся масса ДТ-топлива представляет собой сферу, как показано на рис. 4.3. Предположим, что в центре этой сферы создана горячая сферическая область радиуса R_s с почти однородным распределением плотности $\rho = \rho_s$, температуры $T = T_s$ (как нетрудно убедиться а posteriori, температуры электронов и ионов на этом этапе всегда можно считать одинаковыми) и давления $p = p_s = 2n_s T_s$; здесь $n_s = \rho_s / \bar{m}_i$ — объёмная концентрация ядер горячего топлива, $\bar{m}_i = 2.5m_u$ — средняя масса ядра в эквимольной смеси дейтерия и трития. Горячая центральная область окружена сферическим слоем сжатого холодного топлива. Профили температуры и плотности по холодному топливу пока не важны. Роль

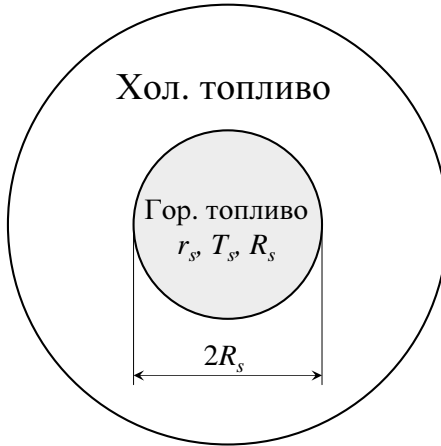


Рис. 4.3. Схематический вид центральной сферически-симметричной ТЯ искры

одной из основных динамических переменных будет играть параметр удержания

$$H = H(r) = \int_0^r \rho dr \quad [\Gamma/\text{см}^2]. \quad (4.44)$$

В частности, будем различать $\langle \rho r \rangle$ искры

$$H_s = \int_0^{R_s} \rho dr = \rho_s R_s, \quad (4.45)$$

и $\langle \rho \Delta r \rangle$ холодного топлива

$$H_c = \int_{R_s}^{R_c} \rho dr. \quad (4.46)$$

Чтобы отличить загорающиеся конфигурации ТЯ топлива от гаснущих не решая соответствующую систему дифференциальных уравнений, необходимо сформулировать правильный критерий зажигания. В этом критерии нужно учесть все существенные процессы нагрева и охлаждения плазмы в области искры. Нагрев осуществляется продуктами ДТ-реакции, а именно, 3.5-мэвными альфа-частицами и 14-мэвными нейтронами. В охлаждении необходимо учесть радиационные потери, охлаждение за счет электронной теплопроводности (ионная теплопроводность в интересующей нас области параметров играет второстепенную роль) и адиабатическое охлаждение за счёт гидродинамического разлёта. В результате, простейший адекватный критерий зажигания можно записать в виде

$$(W_{fus} - W_r - W_{ec}) t_{con} \geq 3n_s T_s, \quad (4.47)$$

где W_{fus} , W_r и W_{ec} [эрг см⁻³ с⁻¹] — усреднённые по объёму искры соответственно скорости ТЯ нагрева, охлаждения излучением и электронной теплопроводностью, t_{con} — время инерциального удержания, $3n_s T_s$ — объёмная плотность тепловой энергии в искре.

В критерии (4.47) предполагаем, что t_{con} есть время, за которое температура плазмы в искре падает приблизительно вдвое в процессе её адиабатического расширения (т.е. при $W_{fus} = W_r = W_{ec} = 0$) от начального состояния n_s, T_s . Тогда физический смысл критерия (4.47) сводится к следующему: подъём температуры в ТЯ искре за счёт суммарного энерговыделения (с учётом всех негидродинамических потерь) должен полностью компенсировать адиабатическое падение температуры вследствие гидродинамического разлёта. Если это условие не будет выполнено, в разлетающемся топливе не может быть инициирован самоускоряющийся процесс развития ТЯ вспышки. Данный критерий можно переписать в эквивалентной форме

$$W_{fus} - W_r - W_{ec} - W_{ad} \geq 0, \quad (4.48)$$

где $W_{ad} = 3n_s T_s / t_{con}$ есть характерная скорость чисто гидродинамического охлаждения при адиабатическом расширении.

Если критерий (4.47) будет выполнен с некоторым запасом, то можно определённо ожидать, что в объёме искры разовьётся ТЯ вспышка. Выделившейся при этом энергии вполне хватит, чтобы при наличии соответствующего механизма передачи энергии (роль которого обычно играют быстрые альфа-частицы и электронная теплопроводность) нагреть до температуры зажигания соседний слой холодного топлива сравнимой массы, который при этом тоже вспыхивает: в результате по топливу начинается распространяться самоподдерживающаяся волна ТЯ горения.

4.3.2 Время инерциального удержания

Аналитическую оценку времени инерциального удержания t_{con} можно получить, если пренебречь всеми процессами нагрева и охлаждения и рассмотреть отдельно процесс адиабатического расширения сферы топлива. Для описания такого расширения применим следующую простую модель 0-мерной гидродинамики. Предположим, что:

- (1) всё холодное топливо, имея конечные массу M_c и массовую толщину H_c , сосредоточено в бесконечно тонком сферическом слое радиусом $R_s = R_s(t)$,
- (2) плотность $\rho = \rho_s(t)$ и температура $T = T_s(t)$ ДТ-топлива одинаковы по всему объёму искры, а гидродинамическая скорость расширения u пропорциональна расстоянию от центра r ,

$$u(t, r) = \dot{R}_s \frac{r}{R_s}, \quad (4.49)$$

где $\dot{R}_s = dR_s/dt$.

В начальный момент $t = 0$ значения основных переменных составляют $R_s = R_{s0}$, $\dot{R}_s = 0$, $p_s = p_{s0}$, $T_s = T_{s0}$.

В процессе адиабатического расширения сохраняются по отдельности массы горячего, M_s , и холодного, M_c , топлива и их полная совокупная энергия. В наших предположениях соответствующие массы составляют

$$M_s = \frac{4\pi}{3} \rho_s R_s^3, \quad M_c = 4\pi R_s^2 H_c, \quad (4.50)$$

а полные кинетическая, E_{kin} , и внутренняя, E_{in} , энергии ДТ-сферы равны

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} \int_0^{R_s} \rho_s u^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} M_c \dot{R}_s^2 = \\ &= \left(\frac{3}{10} M_s + \frac{1}{2} M_c \right) \dot{R}_s^2, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$E_{in} = \frac{3}{2} p_s V_s = 3n_s T_s V_s = \frac{3M_s}{\bar{m}_i} T_s. \quad (4.52)$$

В формуле (4.52) отсутствует внутренняя энергия холодного топлива, поскольку предполагается, что занимаемый им объём пренебрежимо мал. Для горячего ДТ-топлива использовано уравнение состояния идеального максвелловского газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$.

Для описания адиабатического разлёта применим закон сохранения полной энергии и второй закон термодинамики для всей массы топлива в виде

$$\frac{d}{dt} (E_{in} + E_{kin}) = 0, \quad (4.53)$$

$$\frac{dE_{in}}{dt} = -p_s \frac{dV_s}{dt} = -3p_s V_s \frac{\dot{R}_s}{R_s}. \quad (4.54)$$

С помощью выражения (4.52) уравнения (4.53) и (4.54) легко приводятся к виду

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = p_s \frac{dV_s}{dt}, \quad (4.55)$$

$$p_s V_s^{5/3} = p_{s0} V_{s0}^{5/3} = const, \quad (4.56)$$

откуда получаем простое дифференциальное уравнение

$$\ddot{R}_s = \frac{4\pi p_{s0} R_{s0}^5}{\frac{3}{5}M_s + M_c} R_s^{-3} \quad (4.57)$$

для нахождения функции $R_s(t)$. Решение (4.57) имеет вид

$$R_s(t) = R_{s0} \sqrt{1 + (t/t_a)^2}, \quad (4.58)$$

где

$$t_a = \left(\frac{M_c + \frac{3}{5}M_s}{4\pi p_{s0} R_{s0}} \right)^{1/2} \quad (4.59)$$

есть характерное время адиабатического разлёта. Поскольку за время t_a температура в ТЯ искре

$$T_s(t) = T_{s0} \left(\frac{\rho_s}{\rho_{s0}} \right)^{2/3} = \frac{T_{s0}}{1 + (t/t_a)^2} \quad (4.60)$$

падает ровно в два раза, то это время естественно принять за время инерциального удержания рассматриваемой конфигурации. В результате, подставляя (4.50) в (4.59), получаем

$$t_{con} = t_a = \left[\frac{R_s(H_c + \frac{1}{5}H_s)}{p_s} \right]^{1/2} = \frac{1}{\rho_s} \left[\frac{\bar{m}_i H_s (H_c + \frac{1}{5}H_s)}{2T_s} \right]^{1/2}. \quad (4.61)$$

В правой части (4.61) все величины конечно соответствуют начальному моменту $t = 0$, а дополнительный индекс “0” для краткости опущен.

4.3.3 Тепловой баланс в термоядерной искре

Среднюю скорость нагрева W_{fus} ТЯ искры за счёт поглощения продуктов ДТ-реакции можно записать в виде

$$\begin{aligned} W_{fus} &= E_{DT} \left(\frac{1}{5}f_\alpha + \frac{4}{5}f_{n14} \right) n_D n_T \langle \sigma v \rangle_{DT} = \\ &= 8.18 \times 10^{40} (f_\alpha + 4f_{n14}) \rho_s^2 \langle \sigma v \rangle_{DT} \text{ эрг см}^{-3} \text{ с}^{-1}, \quad (4.62) \end{aligned}$$

где $E_{\text{DT}} = 17.6$ МэВ — энергия DT-реакции, а f_α (f_{n14}) — средняя доля энергии всех рождённых 3.5-мэвных альфа-частиц (14-мэвных нейтронов), поглощённая в области искры. В (4.62), как и во всех приведённых ниже практических формулах, плотность ρ_s измеряется в г/см³, температура T_s — в кэВ, $\langle\sigma v\rangle_{\text{DT}}$ — в см³/с.

Ясно, что при $H_s \gg H_\alpha$, где H_α — массовый пробег альфа-частиц в области искры, поглощённая доля энергии $f_\alpha \approx 1$. В противоположном пределе $H_s \ll H_\alpha$ эта доля убывает как $f_\alpha \propto \propto H_s$; точная асимптотика для однородной сферы составляет [65]

$$f_\alpha = \frac{3}{2} \frac{H_s}{H_\alpha}.$$

С учетом этой асимптотики примем следующую простую аппроксимацию

$$f_\alpha = \frac{H_s}{H_s + \frac{2}{3}H_\alpha}, \quad (4.63)$$

которая правильно передаёт предельные значения f_α как при $H_s \ll H_\alpha$, так и при $H_s \gg H_\alpha$. Пробег альфа-частиц в массовых единицах H_α можно оценить по полученной ранее простой формуле (2.141); принятое в этой формуле значение кулоновского логарифма $L = 5$ соответствует DT-плазме при плотности $\rho_s \approx 30$ г/см³. Таким образом, в первом приближении f_α является простой функцией двух параметров H_s и T_s .

Аналогично, отталкиваясь от задачи о рассеянии нейтронов в однородной сфере, описанной в параграфе 2.1, поглощённую долю энергии 14-мэвных нейтронов можно оценить по простой формуле

$$f_{n14} = \frac{0.23H_s}{0.23H_s + H_{n14}}, \quad (4.64)$$

где $H_{n14} = 4.6$ г/см² — пробег 14-мэвных нейтронов в DT-топливе.

Как нетрудно убедиться апостериори, скорость лучистого охлаждения W_r ТЯ искры в DT-топливе можно оценить в оптически тонком приближении, полагая, что пробег излучения как

по тормозному поглощению, так и по томсоновскому рассеянию существенно превосходит размеры горячей области. В этом случае комптонизацию можно не учитывать и при вычислении скорости лучистого охлаждения воспользоваться формулой (3.48) для чисто объёмных потерь на тормозное излучение:

$$W_r = W_{ff} = 3.11 \times 10^{23} \rho_s^2 T_s^{1/2} \text{ эрг см}^{-3} \text{ с}^{-1}. \quad (4.65)$$

Чтобы вычислить скорость охлаждения электронной теплопроводностью, заметим, что плотность потока энергии на внешней границе искры можно оценить как $F_{ec} = \kappa_e \partial T / \partial r \approx \kappa_e T_s / R_s$. Полное количество энергии, вытекающее из искры радиусом R_s в единицу времени, составляет $4\pi R_s^2 F_{ec}$, и для объёмной скорости охлаждения получается выражение

$$W_{ec} = \frac{4\pi R_s^2 F_{ec}}{(4\pi/3)R_s^3} = \frac{3\kappa_e T_s}{R_s^2} = 5.88 \times 10^{19} \frac{\rho_s^2 T_s^{7/2}}{H_s^2} \text{ эрг см}^{-3} \text{ с}^{-1}. \quad (4.66)$$

Здесь $\kappa_e \propto T_s^{5/2}$ — спитцеровский коэффициент электронной теплопроводности в водородной плазме, вычисленный по формуле (3.75) при значении кулоновского логарифма $L = 5$.

4.3.4 Граница зажигания в случае бесконечного удержания

В первую очередь рассмотрим простейший предельный случай бесконечного удержания $t_{con} = \infty$, соответствующий изобарической искре в очень большом объёме холодного топлива. В этом случае критерий (4.47) означает, что для зажигания достаточно обеспечить общий положительный тепловой баланс в области искры,

$$W_{fus} \geq W_{ff} + W_{ec}. \quad (4.67)$$

Чтобы яснее понять относительную роль основных физических процессов, рассмотрим сначала по отдельности две кривые, определяемые условиями

$$W_{fus} = W_{ff} \quad (4.68)$$

и

$$W_{fus} = W_{ec}. \quad (4.69)$$

Взглянув на выражения для W_{fus} , W_{ff} и W_{ec} , сразу видим, что каждое из условий (4.68) и (4.69) определяет одну единственную кривую на плоскости T_s, H_s , несмотря на то, что величины W_{fus} , W_{ff} и W_{ec} в общей совокупности зависят от трёх параметров ρ_s , T_s и R_s . На рис. 4.4 кривые, определяемые условиями (4.68) и (4.69), проведены пунктирными линиями и отмечены метками br и ec соответственно. Положительный тепловой баланс достигается справа-вверху от кривой br и слева-вверху от кривой ec .

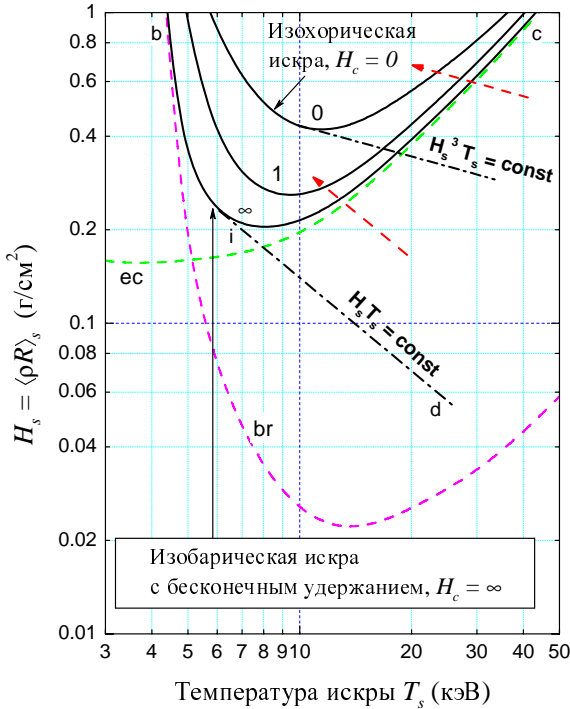


Рис. 4.4. Граница зажигания на параметрической плоскости T_s, H_s для различных конфигураций ДТ-искры вблизи момента максимального сжатия

На рис. 4.4 хорошо видно, что при относительно высоких значениях параметра $H_s \gtrsim 0.5\text{--}1.0 \text{ г/см}^2$ кривая br выходит на почти вертикальную асимптоту, соответствующую температуре зажигания $T_s \approx T_{ig,ff} = 4.5 \text{ кэВ}$, введённой в параграфе 4.1.3 при обсуждении критерия Лоусона. Напомним, что эта температура определяется условием $W_{fus} = W_{ff}$ при $f_\alpha = 1$ и $f_{n14} = 0$. Если рассмотрим ещё более высокие значения параметра $H_s \gtrsim 5\text{--}10 \text{ г/см}^2$, превышающие пробег 14-мэвных нейтронов $H_{n14} = 4.6 \text{ г/см}^2$, то увидим, что благодаря подключению нейтронного нагрева граница зажигания смещается в область более низких температур, приближаясь к значению $T_s = 3.0 \text{ кэВ}$, соответствующему критерию (4.68) при $f_\alpha = f_{n14} = 1$. При этом, однако, возникает дополнительное осложнение, связанное с тем, что искра становится непрозрачной по томсоновскому рассеянию, пробег по которому в ДТ-топливе составляет $H_T = 6.24 \text{ г/см}^2$; последнее означает, что становится неприменимой простая формула (4.65) для скорости лучистого охлаждения, при вычислении которой мы должны теперь учесть как эффекты комптонизации, описанные в разделе 3.3, так и частичное поглощение рождённых фотонов.

В противоположном случае относительно низких значений $H_s \lesssim 0.1 \text{ г/см}^2$ мы выходим на оптически тонкий предел $H_s \ll \ll H_\alpha \propto T_s^{3/2}$ по пробегу альфа-частиц, когда $f_\alpha \propto H_s/H_\alpha \ll 1$. Поскольку в этом пределе $W_{fus}/W_{ff} \propto H_s T_s^{-2} \langle \sigma v \rangle_{DT}$, а функция температуры $T_s^{-2} \langle \sigma v \rangle_{DT}$ имеет максимум при $T_s \approx 13 \text{ кэВ}$, то условие (4.68) накладывает ограничение снизу на возможные размеры т.я. искры H_s ; в результате кривая br достигает минимума $H_s = H_{s,\min} \approx 0.02 \text{ г/см}^2$ при $T_s \approx 13 \text{ кэВ}$. Физической причиной данного ограничения является относительно малый размер искры по сравнению с пробегом альфа-частиц $H_\alpha \gtrsim 0.3\text{--}0.5 \text{ г/см}^2$, при котором лучистое охлаждение горячего ДТ-топлива уже не может быть компенсировано нагревом за счёт торможения этих частиц в области искры.

Однако на следующем шаге, обратившись к условию (4.69),

нетрудно обнаружить, что электронная теплопроводность накладывает более жёсткое ограничение на минимально допустимые значения H_s , чем конечный пробег альфа-частиц. Действительно, поскольку в интересующей нас области $W_{fus}/W_{ec} \propto H_s^2 T_s^{-7/2} f_\alpha \langle \sigma v \rangle_{DT}$, где функция температуры $T_s^{-7/2} f_\alpha \langle \sigma v \rangle_{DT}$ имеет чётко выраженный максимум, то кривая ec на рис. 4.4, определяемая условием (4.69), демонстрирует пологий минимум $H_s = H_{s,\min} \approx 0.16 \text{ г/см}^2$ при $T_s \simeq 3\text{--}5 \text{ кэВ}$.

В результате, проанализировав относительное расположение кривых br и ec , приходим к следующим выводам:

- 1) потери энергии на тормозное излучение определяют нижнюю границу для температуры ТЯ искры, $T_s \geq 4.5 \text{ кэВ}$, при условии, что её размер $H_s < H_{n14} = 4.6 \text{ г/см}^2$;
- 2) охлаждение искры механизмом электронной теплопроводности определяет нижнюю границу для значений $\langle \rho r \rangle$ ТЯ искры, которая составляет $H_s \gtrsim 0.16 \text{ г/см}^2$.

Другими словами, если в ТЯ искре к моменту максимального сжатия создана недостаточно высокая температура, то такая искра гаснет за счет лучистого охлаждения; если же в ней не достигнуто достаточно высокое значение $\langle \rho r \rangle$, искра гаснет, рассасываясь по окружающему холодному топливу механизмом электронной теплопроводности. Одновременный учёт этих двух механизмов охлаждения в условии (4.67) приводит нас к границе зажигания при бесконечном удержании, изображённой на рис. 4.4 сплошной линией $b - i - c$ и помеченной значком ∞ . При этом минимальный размер искры $H_{s,\min} \approx 0.2 \text{ г/см}^2$ достигается при температуре $T_s \approx 7\text{--}9 \text{ кэВ}$.

В действительности ситуация обстоит несколько сложнее, чем описано выше, даже в простейшем случае $t_{con} = \infty$. Дело в том, что сравнительно узкая и горячая искра, которая будет угасать, отдавая тепло соседним холодным слоям топлива, может попасть в область положительного теплового баланса позднее, после значительного понижения температуры. Действитель-

но, при перетекании энергии из горячего центра на холодную периферию сохраняется полная энергия искры

$$E_s = \frac{3}{2} P_s V_s = \frac{3}{2} \frac{4\pi}{3} R_s^3 P_s = \text{const.} \quad (4.70)$$

С другой стороны, при бесконечном удержании в условиях изобаричности в искре сохраняется полное давление $P_s \propto \rho_s T_s = \text{const}$; последнее означает, что ТЯ искра гаснет с сохранением своего геометрического размера R_s , всасывая в себя холодное топливо и наращивая плотность ρ_s , т.е. вдоль траектории

$$\rho_s T_s R_s = H_s T_s = \text{const} \quad (4.71)$$

на плоскости T_s, H_s — как это изображено нижней штриховой стрелкой на рис. 4.4. В результате приходим к выводу, что если искра будет образована с параметрами правее и выше штрихпунктирной прямой $i-d$, задаваемой соотношением $H_s T_s = \text{const}$ и касающейся границы зажигания $b-i-c$, то рано или поздно (в условиях бесконечного удержания) она попадёт в область положительного теплового баланса и вспыхнет.

Данный результат указывает на то, что в качестве критерия зажигания правильнее указывать не нижний предел на $\langle \rho r \rangle$ искры, а нижний предел на тройное произведение $\langle \rho RT \rangle_s$ (или, что то же самое, на произведение $\langle PR \rangle_s$). На рис. 4.5 три сплошные кривые ∞ , 1 и 0 с рисунка 4.4 перерисованы в виде зависимостей произведения $H_s T_s$ от T_s . Более точные расчеты в рамках одномерной гидродинамики [66, 67] приводят к значениям минимальных параметров изобарической искры в ДТ-топливе,

$$\begin{cases} T_s \gtrsim 6 \text{ кэВ}, \\ \langle \rho RT \rangle_s \geq \langle \rho RT \rangle_{ig} \approx 1 \text{ г см}^{-2} \text{ кэВ}, \end{cases} \quad (4.72)$$

которые неплохо согласуются с соответствующими величинами $\langle \rho RT \rangle_s$ и T_s на рис. 4.5, полученными в нашем приближённом анализе. В действительности, благодаря тому, что в

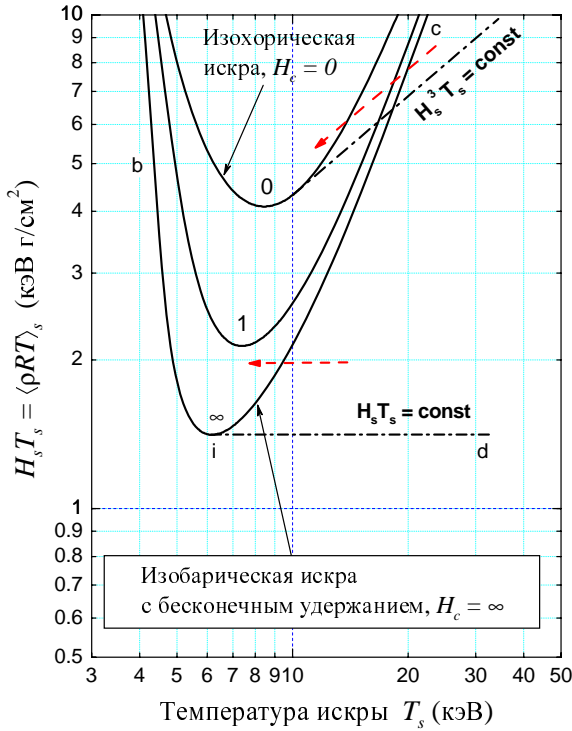


Рис. 4.5. Граница зажигания DT-искры в переменных $\langle \rho RT \rangle_s$ как функция её начальной температуры T_s

рассасывающейся узкой и горячей искре энергия не сохраняется, а несколько возрастает из-за ТЯ нагрева, условие на минимальный размер изобарической искры ещё более смягчается до $\langle \rho RT^{1.5} \rangle_s \gtrsim \langle \rho RT^{1.5} \rangle_{ig}$ (при $T_s \gtrsim 6$ кэВ) [66]. Мы, однако, будем для простоты придерживаться более наглядного условия (4.72).

4.3.5 Граница зажигания в случае конечного удержания

Подставляя оценку (4.61) для времени инерциального удержания t_{con} в критерий зажигания (4.47), получаем алгебраическое соотношение, определяющее границу зажигания изобарической ДТ-искры при конечных значениях массовой толщины холодного топлива H_c , т.е. при конечных временах удержания t_{con} . Легко убедиться, что при каждом фиксированном значении H_c условие (4.47) определяет единственную кривую на плоскости T_s, H_s . На рис. 4.4 показаны три такие кривые, соответствующие трём разным значениям параметра H_c : двум крайним пределам $H_c = 0$ (сплошная кривая, помеченная цифрой 0) и $H_c = \infty$ (сплошная кривая, помеченная символом ∞), а также одному промежуточному значению $H_c = 1 \text{ г/см}^2$ (сплошная кривая, помеченная цифрой 1). Чем выше значение H_c по сравнению с H_s , тем выше относительная роль холодного топлива в инерционном удержании всей конфигурации. Поскольку предел бесконечного удержания $H_c = \infty$ был подробно проанализирован в предыдущем параграфе, то обратимся к рассмотрению противоположного предельного случая $H_c = 0$.

Нетрудно понять, что в данном рассмотрении случай $H_c = 0$ соответствует не “голой” ТЯ искре без окружающего слоя холодного топлива, а изохорической искре, созданной быстрым (по сравнению с гидродинамическим разлётом) воздействием стороннего источника на некоторую малую область однородно сжатого холодного топлива. Действительно, поскольку в критерии (4.47) присутствует охлаждение за счёт теплопроводности, мы неявно предполагаем, что область искры всегда окружена более холодным веществом, впитывающим в себя тепло. Для “голой” искры в вакууме потери энергии за счёт теплопроводности были бы просто равны нулю.

С другой стороны, если некоторую часть однородной по плотности конфигурации очень быстро нагреть до высокой температуры, при которой давление нагретого вещества во много раз

превысит давление холодного окружения, то в первом приближении можно считать, что разлёт горячей массы будет происходить так, будто холодного окружения вообще нет, и положить $H_c = 0$ в формуле (4.61) для времени инерциального удержания t_{con} . Таким образом, при интерпретации результатов, представленных на рис. 4.4 и 4.5, можно руководствоваться следующими положениями:

- 1) случай $H_c = \infty$ соответствует изобарической ДТ-искре в бесконечно большом объёме холодного топлива; давление в искре равно давлению в холодном топливе;
- 2) случай $H_c = 0$ соответствует изохорической ДТ-искре, окружённой слоем холодного топлива, толщина которого не имеет значения; плотность в искре равна плотности в холодном топливе;
- 3) случай $0 < H_c < \infty$ соответствует изобарической ДТ-искре в некотором конечном объёме холодного топлива.

Так же как и при бесконечном удержании, в случае изохорической искры необходимо учесть дополнительную возможность более позднего зажигания после первой фазы угасания искры за счёт электронной теплопроводности. Теперь, однако, мы должны считать, что горячая и узкая искра рассасывается на фоне постоянной плотности $\rho_s = \text{const}$ (т.е. в явно сверхзвуковом режиме), увеличивая при этом свой радиус R_s . В такой ситуации сохранение полной энергии $E_s \propto \rho_s R_s^3 T_s \propto \rho_s^3 R_s^3 T_s = H_s^3 T_s = \text{const}$ означает, что изохорическая искра угасает с сохранением произведения $H_s^3 T_s$. В результате, в изохорическом случае все начальные состояния с отрицательным тепловым балансом (под сплошной кривой 0) на параметрической плоскости T_s, H_s (или $T_s, H_s T_s$), лежащие выше касательной $H_s^3 T_s = \text{const}$, в конце концов тоже попадают в область положительного теплового баланса и загораются. Этот факт подтверждается и прямыми гидродинамическими расчётами.

На рис. 4.4 и 4.5 хорошо видно, что с ослаблением удерживающего влияния холодного топлива (т.е. с уменьшением H_c) граница зажигания на плоскости T_s, H_s смещается к более высоким значениям этих параметров, т.е. становится более труднодоступной. Сопоставление различных кривых на этих рисунках показывает, что наиболее универсальный критерий искрового зажигания сводится к пороговому значению тройного произведения $\langle \rho RT \rangle_s = H_s T_s$, минимум которого всегда попадает в интервал температур $5 \text{ кэВ} < T_s < 10 \text{ кэВ}$. Этот минимум фактически и определяет самый легко доступный участок границы зажигания. Согласно расчётам Атцени [67], порог зажигания изохорической искры составляет

$$\begin{cases} T_s = 8-10 \text{ кэВ}, \\ \langle \rho RT \rangle_s \geq \langle \rho RT \rangle_{ig} \approx 5 \text{ г см}^{-2} \text{ кэВ}, \end{cases} \quad (4.73)$$

что приблизительно в 5 раз превышает соответствующий порог (4.72) для изобарической искры в бесконечной массе топлива.

Подводя итог проделанному анализу, приходим к следующим выводам. В зависимости от того, какая масса холодного ДТ-топлива окружает ТЯ искру в момент максимального сжатия (а точнее, в зависимости от соотношения между H_c и H_s), и насколько хорошо выполнено условие изобаричности, минимальные параметры искры варьируются между двумя крайними пределами, соответствующими значениям $H_c = \infty$ (изобарическая искра в бесконечной среде) и $H_c = 0$ (изохорическая искра). При этом при переходе от $H_c = \infty$ к $H_c = 0$ оптимальная температура зажигания повышается от $T_s \approx 6 \text{ кэВ}$ до $T_s \approx 9 \text{ кэВ}$, а минимальное значение тройного произведения $\langle \rho RT \rangle_s = H_s T_s$ — от $1 \text{ г см}^{-2} \text{ кэВ}$ до $5 \text{ г см}^{-2} \text{ кэВ}$.

Здесь следует отметить, что в литературе нередко можно встретить утверждения, сводящиеся к тому, что порог искрового зажигания ДТ-топлива определяется некоторым универсальным значением $H_s T_s = \text{const}$. Как показывает наш анализ и более точные гидродинамические расчёты [66, 67], величина $H_s T_s$

на пороге зажигания изменяется хотя и в ограниченном (в пределах фактора $\simeq 3-5$), но всё-таки в достаточно широком интервале, чтобы эти вариации необходимо было учитывать при выводе скэйлингов и определении энергетических порогов зажигания ТЯ мишеней [68, 69] — тем более, что полная энергия, которую следует затратить на создание соответствующей конфигурации топлива, весьма чувствительна к значению $H_s T_s$ (пропорциональна $(H_s T_s)^3$ при фиксированных скорости имплозии и энтропии холодного топлива [69, 70]). Отметим также, что встречающееся иногда утверждение, что ограничение снизу $H_s \gtrsim 0.3-0.5$ г/см² на $\langle \rho r \rangle$ искры обусловлено пробегом 3.5-мэвных альфа-частиц (который действительно составляет $H_\alpha \simeq 0.3$ г/см² при $T_s \simeq 10$ кэВ), также не соответствует истине. Проведённый выше анализ показывает, что ограничение снизу на значения $\langle \rho r \rangle$ искры обусловлено в основном совокупным влиянием электронной теплопроводности и конечного времени инерциального удержания.

Контрольные вопросы

1. Какой физический смысл вкладывается в понятие времени удержания в критерии Лоусона?
2. Почему критерий Лоусона не может быть выполнен в ВН-топливе?
3. Какую температуру в УТС называют температурой зажигания? Чему она равна численно для DT-топлива? Для DD- и для D³He-топлива?
4. Какие два физических процесса определяют нижнюю границу на значения параметра $\langle \rho r \rangle$ ТЯ топлива в критерии инерциального удержания?
5. Чем вызвана необходимость сверхплотного (в тысячи раз по плотности) сжатия ТЯ топлива в ИТС?

6. Как время инерционного удержания изобарической ТЯ искры зависит от массы окружающего слоя холодного топлива? Тот же вопрос для изохорической искры.
7. Какие физические процессы играют решающую роль при определении нижней границы для температуры ТЯ искры в DT-топливе?
8. Какие физические процессы определяют нижнюю границу по параметру $\langle \rho r \rangle$ ТЯ искры в DT-топливе?
9. Какую роль в процессе разгорания ТЯ искры в DT-топливе играет нагрев топлива 14-мэвными нейтронами? Почему?

Список литературы

- [1] * Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. — 2-е изд. — М.: Наука, 1966.
- [2] * Дюдерштадт Дж., Мозес Г. *Инерциальный термоядерный синтез*. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
- [3] * Atzeni S. and Meyer-ter-Vehn J. *The Physics of Inertial Fusion*. — Oxford: Clarendon Press, 2004.
- [4] * Lindl J.D. *Inertial Confinement Fusion*. — New York: Springer-Verlag, 1998.
- [5] * Lindl J.D. *et al.*// Phys. Plasmas **11**, 339-491 (2004).
- [6] * *Ядерный синтез с инерционным удержанием* Под ред. Б.Ю. Шаркова. — М.: Физматлит, 2005.
- [7] Кравцов В.А. *Массы атомов и энергии связи ядер*. — М.: Атомиздат, 1965.
- [8] Audi G., Wapstra A.H. *The 1995 update to the atomic mass evaluation*// Nuclear Physics **A595**, 409-80 (1995).
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. — 7-е изд. — М.: Наука, 1988.
- [10] *Физический энциклопедический словарь* Под. ред. А.М. Прохорова. — М.: Советская Энциклопедия, 1983.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*. — 4-е изд. — М.: Наука, 1989.

* Общая литература по курсу, рекомендованная для студентов.

- [12] Fowler W.A., Caughlan G.R., and Zimmerman B.A. *Thermonuclear reaction rates*// Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics **5**, 525 (1967); *ibid.* **13**, 69 (1975).
- [13] Bosch H.-S., Hale G.M.// Nucl. Fusion **32**, 611 (1992).
- [14] Nevins W.M., Swain R.// Nucl. Fusion **40**, 865 (2000).
- [15] Гончаров Г.А.// УФН **166** (10), 1095 (1996).
- [16] Seagrave J.D., Henkel R.L.// Phys. Rev. **98**, 666 (1955).
- [17] Shirato S., Koori N.// Nucl. Phys. **A 120**, 387 (1968).
- [18] Battat M.E. *et al.*// Nucl. Phys. **12**, 291 (1959).
- [19] Garber D.I., Kinsey R.R. *Neutron Cross Sections. Volume II, Curves.* — 3-d ed., National Neutron Cross Section Center. BNL-325, Brookhaven National Laboratory Associated Universities, Inc., 1976.
- [20] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика.* — 4-е изд. — М.: Наука, 1988.
- [21] Garber D.I., Strömberg L.G., Goldberg M.D., Cullen D.E., May V.M. *Angular Distributions in Neutron-Induced Reactions. Volume I, Z=1 to 20.* — 3-d ed., National Neutron Cross Section Center. BNL-400, Brookhaven National Laboratory Associated Universities, Inc., 1970.
- [22] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред.* — 2-е изд. — М.: Наука, 1982.
- [23] Bohr N.// Philos. Mag. **25**, 10 (1913).
- [24] Bohr N.// Philos. Mag. **30**, 581 (1915).
- [25] Bethe H.// Ann. Physik **5**, 325 (1930).
- [26] Bethe H.// Z. Physik **76**, 293 (1932).

- [27] Sigmund P. *Particle Penetration and Radiation Effects: General Aspects and Stopping of Swift Point Charges (Springer Series in Solid-State Sciences)*. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2006.
- [28] Jackson J.D. *Classical Electrodynamics*. — 2nd edition, New York: Wiley, 1975.
- [29] Ashley J.C., Ritchie R.H., Brandt W.// *Phys. Rev.* **В 5**, 2393 (1972).
- [30] *Handbook of Mathematical Functions* edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun. — Washington D.C.: National Bureau of Standards, 1972.
- [31] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. *Интегралы и ряды (специальные функции)*. — М.: Наука, 1983.
- [32] Basko M.M.// *Eur. Phys. J. D* **32**, 9 (2005).
- [33] Bloch F.// *Ann. Phys. (Leipzig)* **16**, 285 (1933).
- [34] Kramers H.A.// *Physica* **13**, 401 (1947).
- [35] Бете Г. *Квантовая механика*. — М.: Мир, 1965.
- [36] Walske M.C.// *Phys. Rev.* **88**, 1283 (1952).
- [37] Ahlen S.P.// *Rev. Mod. Phys.* **52**, 121 (1980).
- [38] Lindhard J.// *Dan. Mat. Fys. Medd.* **28**, no. 8, 1 (1954).
- [39] Ларкин А.И.// *ЖЭТФ* **37**, 264 (1959).
- [40] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Физическая кинетика*. — М.: Наука, 1979.
- [41] Chandrasekhar S. *Principles of Stellar Dynamics*. — New York: Dover, 1960.

- [42] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Статистическая физика. Часть I.* — 3-е изд. — М.: Наука, 1976.
- [43] Компанеец А.С.// ЖЭТФ **31**, 876 (1956).
- [44] Зельдович Я.Б.// УФН **115**, 161 (1975).
- [45] Kramers H.A.// Phil. Mag. **46**, 836 (1923).
- [46] Gaunt J.A.// Phil. Trans. Roy. Soc. London **A229**, 163 (1930).
- [47] Green J.// Astrophys. J. **130**, 693 (1959).
- [48] Зоммерфельд А. *Строение атома и спектральные линии.* — М.: Гостехиздат, 1956.
- [49] Elwert G.// Ann. Physik **34**, 178 (1939).
- [50] Kellogg E., Baldwin J.R., Koch D.// Astrophys. J. **199**, 299 (1975).
- [51] Имшенник В.С., Михайлов И.Н., Баско М.М., Молодцов С.В.// ЖЭТФ **90**, 1669 (1986).
- [52] Spitzer L., Härm R.// Phys. Rev. **89**, 977 (1953).
- [53] Spitzer L., *Physics of Fully Ionized Gases.* — 2-nd ed. — New York: Interscience, 1962.
- [54] Имшенник В.С.// Астрон. ж. **38**, 652 (1961).
- [55] Lampe M.// Phys. Rev. **170**, 306 (1968); **174**, 276 (1968).
- [56] Боброва Н.А., Сасоров П.В.// Физика плазмы **19**, 789 (1993).
- [57] Brysk H., Campbell P.M., Hammerling P.// Plasma Physics **17** (1975) 473.
- [58] Lawson J.D.// Proc. Phys. Soc. London **B70**, 6 (1957).

- [59] Braams C.M., Stott P.E. *NUCLEAR FUSION. Half a Century of Magnetic Confinement Fusion Research.*— Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 2002.
- [60] Ninomiya H.// Nucl. Fusion **45**, S13 (1977).
- [61] Moreau D.C.// Nucl. Fusion **17**, 13 (1977).
- [62] Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике.*— М.: Наука, 1981.
- [63] Fraley G.S., Linnebur E.J., Mason R.J., Morse R.L.// Phys. Fluids **17**, 474 (1974).
- [64] Tabak M., Hammer J., Glinsky M.E., Kruer W.L., Wilks S.C., Woodworth J., Campbell E.M., Perry M.D., Mason R.J.// Phys. Plasmas **1**, 1626, (1994).
- [65] Крохин О.Н., Розанов В.Б.// Квантовая электроника **4**, 118 (1972).
- [66] Basko M.M.// Nucl. Fusion **30**, 2443 (1990).
- [67] Atzeni S.// Jpn. J. Appl. Phys. **34**, 1980 (1995).
- [68] Basko M.M.// Nucl. Fusion **35**, 87 (1995).
- [69] Basko M.M., Johner J.// Nucl. Fusion **38**, 1779 (1998).
- [70] Herrmann M.C., Tabak M., Lindl J.// Nucl. Fusion **41**, 99 (2001).

Михаил Михайлович Баско

Физические основы инерциального термоядерного синтеза

Учебное пособие

Редактор Е.Е. Шумакова
Оригинал-макет изготовлен

Подписано в печать 2009 г. Формат 60×84 1/16.
Печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз.
Изд. № 040-1. Заказ № .

Московский инженерно-физический институт (государственный
университет),
115409, Москва, Каширское ш., д. 31.
Типография МИФИ.